

## **SOLUSI NUMERIK ALIRAN FLUIDA TAK TUNAK TERHADAP DISTRIBUSI KECEPATAN DAN TEMPERATUR**

### ***NUMERICAL SOLUTION OF UNSTEADY FLUID FLOW FOR VELOCITY AND TEMPERATURE DISTRIBUTION***

**Annisa Dwi Sulistyningtyas**

Pendidikan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas PGRI Adi Buana Surabaya

Jl. Ngagel Dadi IIIB No. 37 Surabaya

[annisadwistyas@unipasby.ac.id](mailto:annisadwistyas@unipasby.ac.id)

#### **ABSTRACT**

*The numerical solutions of a mathematical model are one of the studies that interest for many researchers, especially fluid cases. Numerical simulations are needed to describe the velocity and temperature distribution of fluid flow over the surface of an elliptic cylinder. In this study, the fluid flow is unsteady with viscous and elastic characteristics. The mathematical models are discredited and simulated by using the Matlab software. Based on the simulation results, a graph has obtained velocity and temperature distribution profile from fluid flow. From that graphics, it can be concluded that viscosity value affects the velocity dan temperature distribution of the fluid flow, that if the  $K$  value is significant, the velocity of the fluid is slower and temperature is high. That is due to the friction of fluid with the surface of the elliptic cylinder.*

**Keywords:** *Unsteady Flow, Viscoelastic Fluid, Viscosity*

#### **ABSTRAK**

Pencarian solusi numerik dari sebuah model matematika adalah salah satu jenis penelitian yang diminati banyak peneliti khususnya di bidang fluida. Simulasi numerik sangat dibutuhkan dalam menggambarkan distribusi kecepatan dan temperatur dari aliran fluida yang melewati permukaan sebuah silinder eliptik. Dalam penelitian ini aliran fluida bersifat tak tunak dengan karakteristik kental dan elastis. Model matematika yang didapat, didiskritkan dan disimulasikan dengan *software* Matlab. Berdasarkan hasil simulasi, diperoleh grafik berupa profil distribusi kecepatan dan temperatur fluida dari aliran fluida. Dari grafik yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa nilai  $K$  sangat berpengaruh pada distribusi kecepatan dan temperatur aliran fluida, yaitu semakin besar nilai  $K$ , maka kecepatan fluida yang mengalir semakin lambat dan temperatur yang dihasilkan semakin tinggi. Hal tersebut diakibatkan karena adanya gesekan antara fluida dengan permukaan silinder eliptik.

**Kata Kunci:** *Aliran Tak Tunak, Fluida Viskoelastik, Viskositas*

#### **1. PENDAHULUAN**

Viskositas merupakan salah satu sifat fluida yang berpengaruh pada gaya yang bekerja dalam aliran fluida. Kajian ini cukup menarik, khususnya dalam skala besar yang membutuhkan efisiensi bahan dan perhitungan yang tepat, sehingga dibutuhkan model

matematika untuk membantu memberikan hasil yang efisien (Martanegara & Yulianti, 2020). Berdasarkan besar kecilnya nilai viskositas, fluida dibagi menjadi dua jenis yaitu Fluida Newtonian dan Fluida non-Newtonian. Menurut (Mardianto, 2018) Fluida Non-Newtonian merupakan fluida dengan model paling sederhana yang memuat viskositas, seperti contoh fluida viskoelastik. Selain itu, fluida viskoelastik memiliki kurva tegangan yang tidak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linierisasi Newton dan memiliki viskositas yang tidak konstan apabila terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut (Sahaya et al., 2016). Dalam bidang industri, aplikasi sifat viskositas fluida sangat bermanfaat khususnya dalam proses pengambilan minyak lepas pantai. Dengan sifat fluida kental dan elastis yang bekerja pada permukaan benda berbentuk silinder, perlu diketahui besar kecilnya kecepatan dan temperatur yang dibutuhkan sehingga dapat dikembangkan lebih lanjut pada bidang teknologinya.

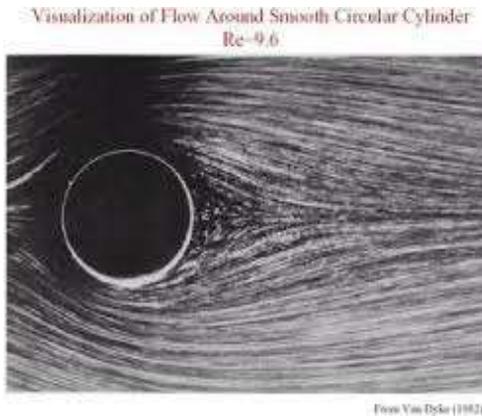
Pada penelitian yang telah dilakukan oleh (Sulistiyono, 2015) tentang penyelesaian numerik dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit yang digunakan untuk menghitung perpindahan panas melalui medium padat. Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut adalah bahwa skema eksplisit memberikan hasil yang stabil bila  $\Delta t$  cukup kecil atau bila  $0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$ . Selain itu, penelitian tentang solusi numerik aliran fluida dan perpindahan panas juga dilakukan oleh (Sarif et al., 2013). Pada penelitian tersebut digunakan Metode Box Keller untuk menyelesaikan penyelesaian numeriknya. Hasil yang diperoleh adalah adanya pengaruh temperatur dinding dan koefisien perpindahan panas dengan variasi nilai Bilangan Prandtl, yaitu semakin besar Bilangan Prandtl yang diberikan profil temperatur yang dihasilkan semakin kecil. Penelitian tentang fluida dengan penyelesaian secara numerik juga pernah dilakukan diantaranya oleh (Muhajir, 2011), (Kasim et al., 2015), (Mahat et al., 2017), (Burshtein et al., 2017), (Cheng, 2012), dan (Endang et al., 2017).

Dari permasalahan dan juga penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya, studi kasus dalam penelitian ini adalah tentang model matematika yang diperoleh dari persamaan *Navier-Stokes* yang diselesaikan dari sebuah bidang geometri yang berbentuk silinder eliptik. Model matematika tersebut selanjutnya ditransformasikan ke bentuk persamaan similaritas yang lebih sederhana dengan menggunakan fungsi aliran. Dalam studi kasus ini, daerah pengamatan yang dilakukan adalah pada titik stagnasi, yaitu titik pada permukaan silinder yang mempunyai nilai kecepatan sama dengan nol ( $x \approx 0$ ).

Selanjutnya, model matematika dengan bentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) ini, diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Metode FTCS dan selanjutnya dilakukan simulasi menggunakan *software* Matlab.

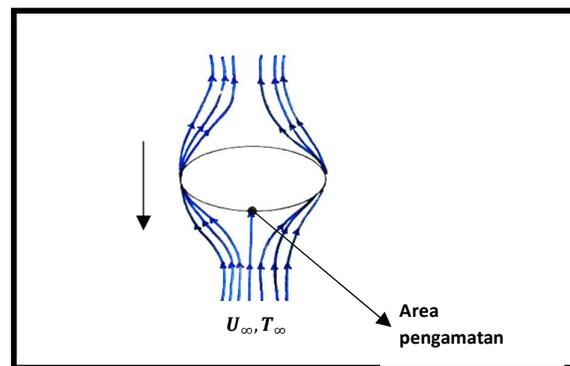
## 2. METODOLOGI

### A. Tahap Analisis Permasalahan



Gambar 1 Visualisasi Aliran Fluida Melewati Silinder

Sumber Gambar: <http://staffnew.uny.ac.id/upload/132231619/pendidikan/untuk-upload-mhs.pdf> (Padat, n.d.)



Gambar 2 Model Fisik Aliran Fluida Viskoelastik  
Sumber gambar: Dokumen Pribadi

Gambar 1 menjelaskan tentang visualisasi aliran fluida melewati silinder, sedangkan Gambar 2 menjelaskan tentang model fisik aliran fluida dengan aliran fluida dari bawah ke atas melewati sebuah silinder eliptik dengan aliran fluida bersifat tak tunak (*unsteady*) dan bersifat tak mampu mampat (*incompressible*). Aliran fluida ini dipengaruhi oleh

konveksi bebas dan diasumsikan bahwa kecepatan aliran bebas dan temperatur aliran fluida sebelum melewati silinder eliptik masing-masing adalah  $U_{\infty}$  dan  $T_{\infty}$ .

Berdasarkan permasalahan yang telah dijelaskan pada bagian pendahuluan, maka dilakukan langkah-langkah analisis permasalahan sebagai berikut:

1. Membangun model matematika aliran fluida yang melewati permukaan silinder dari persamaan berdimensi, yaitu persamaan kontinuitas, momentum, dan energi;
2. Menentukan kondisi batas dari model matematika yang telah diperoleh dengan area pengamatan di titik stagnasi

#### B. Tahap Implementasi

Pada tahap implementasi, dilakukan penyelesaian secara numerik dengan menggunakan metode Beda Hingga. Model matematika yang diperoleh ditransformasikan sehingga diperoleh bentuk persamaan sederhana (1D) dengan proses similaritas dengan menggunakan fungsi alir. Selanjutnya, dilakukan diskritisasi dan linierisasi persamaan sehingga diperoleh persamaan numerik yang kemudian disimulasikan dengan menggunakan Matlab pada tahap berikutnya.

#### C. Tahap Analisis Akhir

Pada tahap analisis akhir, dilakukan langkah-langkah analisis sebagai berikut:

1. Simulasi numerik dengan menggunakan *software* Matlab;
2. Diberikan variasi nilai  $K$  untuk mengetahui pengaruh nilai viskositas terhadap distribusi kecepatan dan temperatur aliran fluida;
3. Analisis hasil dari simulasi numerik yang dipengaruhi oleh nilai  $K$ .

### 3. PEMBAHASAN

#### A. Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan untuk mendapatkan model matematika pada aliran fluida viskoelastik dengan sifat aliran *incompressible* dan *unsteady*, diperoleh persamaan Navier-Stokes sebagai berikut (Imron et al., 2013):

Persamaan massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Persamaan momentum

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] - \theta \text{ sir} \quad (2)$$

Persamaan energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta \quad (3)$$

dengan kondisi batas (Kasim, 2014):

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta' = -1 \quad \text{on } y = 0 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

## B. Fungsi Alir

Fungsi alir atau stream function adalah suatu fungsi yang digunakan untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan, yaitu yang dinotasikan dengan  $u$  (aliran berada pada arah  $x$ ) dan  $v$  (aliran berada pada arah  $y$ ) (Afifah & Putra, 2018). Dalam penelitian ini, diberikan fungsi alir sebagai berikut (Deswita & Lili, 2013):

$$\psi = xf(x, y), \quad \theta = \theta(x, y) \quad (5)$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi alir (stream function), maka didapatkan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

Selanjutnya, pada saat fluida melewati area pengamatan, yaitu di titik stagnasi dimana  $x \approx 0$ , maka diperoleh persamaan similaritas dalam bentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) berikut:

$$f''' + ff'' - (f')^2 + \theta \sin A - K(2f'f''' - ff^{(4)} - (f'')^2) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' + \gamma\theta = 0 \quad (8)$$

dimana

$$Pr = \frac{v}{\alpha}, \quad K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2 Q_0}{v \rho C_p Gr^{1/2}} \quad (9)$$

## C. Penyelesaian Numerik

Pada tahap ini, dijelaskan mengenai penyelesaian numerik dari model matematika yang diperoleh dari persamaan similaritas. Metode numerik yang digunakan dalam studi kasus ini adalah Metode *Forward Time Center Space (FTCS)* atau sering disebut Metode Bada Hingga Eksplisit. Metode beda hingga merupakan metode yang digunakan untuk

menyelesaikan persamaan panas secara konveksi pada koordinat bidang silinder (Purnami et al., 2018). Berdasarkan Persamaan (7) dan (8), dilakukan proses numerik sebagai berikut:

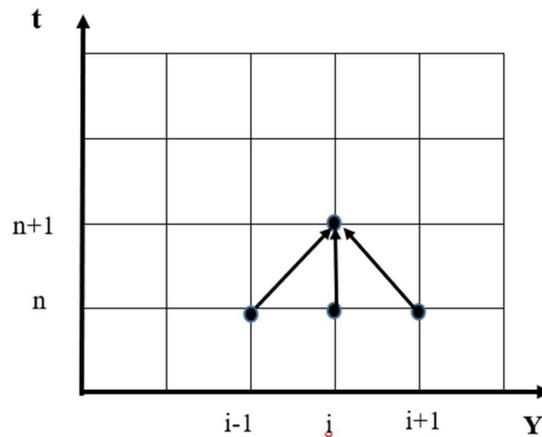
$$f' = p \tag{10}$$

$$f = p\Delta y$$

Sehingga Persamaan (7) dan (8) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$p'' + p\Delta y p' - p^2 + \theta \sin A - K(2pp'' - p\Delta y p''' - (p')^2) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' + \gamma\theta = 0 \tag{12}$$



**Gambar 3** Skema Metode FTCS

Sumber gambar: Dokumen Pribadi

Berdasarkan Gambar 3, penerapan beda pusat terhadap  $f$  di titik  $i, j$ , diperoleh:

Skema untuk turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

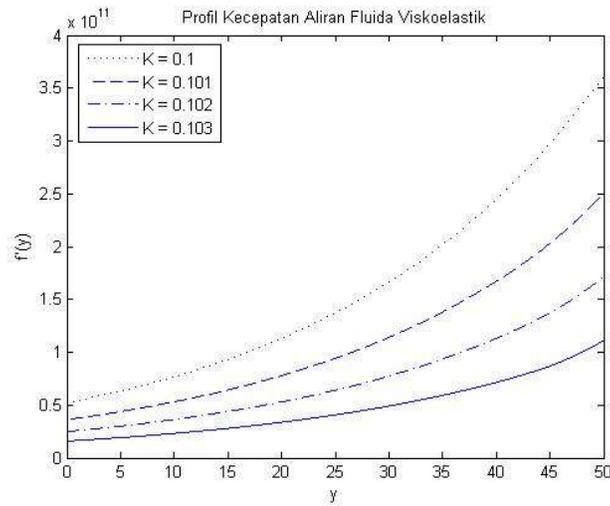
Skema untuk turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

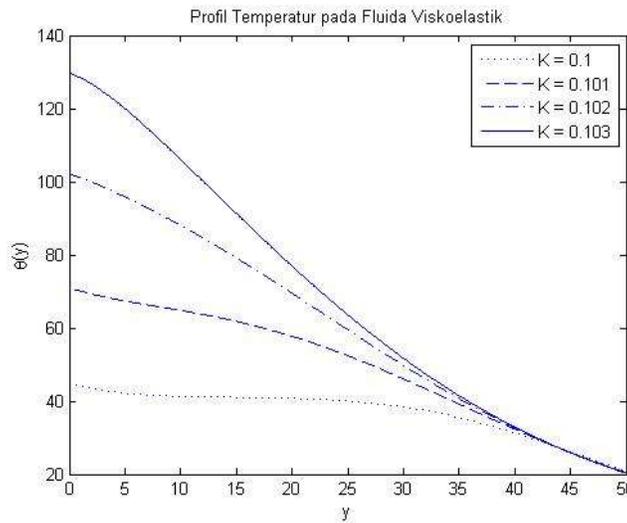
Skema untuk turunan ketiga:

$$\left. \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+2} - 2p_{i+1} + 2p_{i-1} - p_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2)$$

Berdasarkan hasil pendiskritan dengan menggunakan Metode FTCS, selanjutnya dilakukan simulasi menggunakan *software* Matlab diperoleh hasil sebagai berikut:



**Gambar 4** Distribusi Kecepatan dengan Variasi Nilai  $K$



**Gambar 5** Distribusi Temperatur dengan Variasi nilai  $K$

Gambar 4 dan 5 yaitu menggambarkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida pada permukaan silinder eliptik, yaitu pada titik stagnasi dengan nilai  $\gamma = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$ , dan variasi nilai  $K = 0.1, 0.101, 0.102, 0.103$ . Dari grafik yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa nilai  $K$  sangat berpengaruh pada distribusi kecepatan dan temperatur aliran fluida, yaitu semakin besar nilai  $K$ , kecepatan fluida yang mengalir semakin lambat dan temperatur yang dihasilkan semakin tinggi. Hal tersebut terjadi akibat pengaruh gaya gesek yang dihasilkan antara dinding benda dengan fluida, sehingga menghambat aliran fluida dan menimbulkan panas.

#### 4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi dapat diperoleh hal-hal sebagai berikut:

- a. Model matematika dari aliran fluida berupa persamaan similaritas yang menggambarkan kecepatan dan temperatur fluida, yaitu:

$$f''' + ff'' - (f')^2 + \theta \sin A - K(2f'f''' - ff^{(4)} - (f'')^2) = 0$$

dan

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' + \gamma\theta = 0$$

Simulasi numerik berupa profil kecepatan temperatur yang menggambarkan sebuah distribusi kecepatan dan temperatur dengan pengaruh nilai viskositas ( $K$ ) di titik stagnasi pada permukaan silinder eliptik. Saat diberikan nilai konstan yaitu nilai  $\gamma = 1, Pr = 1, a = 10, b = 5,$  dan variasi nilai  $K = 0.1, 0.101, 0.102, 0.103,$  diperoleh bahwa semakin besar nilai  $K,$  semakin lambat aliran fluida yang dihasilkan dan semakin tinggi panas yang dihasilkan. Hal tersebut disebabkan oleh gaya gesek yang ditimbulkan antara fluida dengan permukaan benda.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- Afifah, Y. N., & Putra, B. C. (2018). Model Matematika Aliran Tak Tunak Pada Nano Fluid Melewati Bola Teriris Dengan Pengaruh Medan Magnet. *Teknika: Engineering and Sains Journal*, 2(2), 119. <https://doi.org/10.51804/tesj.v2i2.274.119-124>
- Burshtein, N., Zografos, K., Shen, A. Q., Poole, R. J., & Haward, S. J. (2017). Inertioelastic flow instability at a stagnation point. *Physical Review X*. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.041039>
- Cheng, C. Y. (2012). Free convection of non-Newtonian nanofluids about a vertical truncated cone in a porous medium. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.08.004>
- Deswita, L., & Lili, E. (2013). *Model Matematika Aliran Fluida Lapisan Batas Terhadap Terhadap Pelat Mendatar*. 2, 319–321.
- Endang, M., Budiana, E., Kamal, S., Teknikmesin, S. S.-, Grafika, J., Yogyakarta, N., Grafika, J., & Yogyakarta, N. (2017).  $v * J + At Kv * + v. III$ .
- Imron, C., Suhariningsih, Widodo, B., & Yuwono, T. (2013). Numerical simulation of fluid flow around circular and I-shape cylinder in a tandem configuration. *Applied*

- Mathematical Sciences*. <https://doi.org/10.12988/ams.2013.39490>
- Kasim, A. R. M. (2014). Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid. In *Universiti Teknologi Malaysia, Faculty of Science: Ph. D. Thesis*.
- Kasim, A. R. M., Jiann, L. Y., Rawi, N. A., Ali, A., & Shafie, S. (2015). Mixed Convection Flow of Viscoelastic Fluid over a Sphere under Convective Boundary Condition Embedded in Porous Medium. *Defect and Diffusion Forum*. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.362.67>
- Mahat, R., Rawi, N. A., Kasim, A. R. M., & Shafie, S. (2017). Mixed convection boundary layer flow of viscoelastic nanofluid past a horizontal circular cylinder: Case of constant heat flux. *Journal of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012052>
- Mardianto, L. (2018). *Solusi Numerik dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Konveksi Campuran Melalui Bola Bermagnet-Numerical Solution Of The Model Of ....*
- Martanegara, H. A., & Yulianti, K. (2020). Model Matematika Fluida Lapisan Tipis Pada Bidang Miring. *Jurnal EurekaMatika*, 8(1), 29–41.
- Muhajir, K. (2011). Pengaruh Viskositas terhadap Aliran Fluida GasCair melalui Pipa Vertikal dengan Perangkat Lunak Ansys Fluent 13.0. *Jurnal Kompetensi Teknik*.
- Padat, Z. (n.d.). • *Definisi Fluida • Ruang Lingkup Mekanika Fluida • Persamaan Dasar • Metode Analisa • Dimensi dan Unit Fluida*.
- Purnami, D., Putri, S., Sukarsa, I. M., Ngurah, G., & Agustika, S. (2018). *Analisis Kestabilan Numerik Metode Beda Hingga pada Persamaan Getaran Membran dan Simulasinya*. September, 8–11.
- Sahaya, R., Widodo, B., Imron, C., & Matematika, J. (2016). Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelatis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*.
- Sarif, N. M., Salleh, M. Z., & Nazar, R. (2013). Numerical solution of flow and heat transfer over a stretching sheet with newtonian heating using the keller box method. *Procedia Engineering*. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.02.070>
- Sulistiyono, B. A. (2015). Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Math Educator Nusantara*.