Variasi Solusi Dispersi Gaussian Pada Persamaan Difusi Linear Satu Dimensi Menggunakan Tikz/Canvas

[1] Alfi Maulani, [2] Hendro Waryanto, [3] Andri Sofyan Husein
[1,2] Program Studi Matematika, Universitas Pamulang
[3] Universitas Buddhi Dharma
E-mail: dosen02330@unpam.ac.id

ABSTRACT

As a fundamental process in life and the universe, diffusion plays an important role in various contexts. The one-dimensional (1D) linear diffusion equation describes molecular diffusion with zero concentration gradients in the y and z directions, where D is a constant diffusion coefficient. This research focuses on the case of an infinitely long and narrow pipe of radius a, where a marker substance of mass M is injected uniformly over the entire cross-section of the region $A = \pi a^2$ at $x = 0$ and $t = 0$. The aim of the research is to find a solution for the concentration distribution over time, which is influenced by molecular diffusion, using a very low initial concentration. In addition to the 3D plot, an alternative 2D plot in different coordinate planes with Tikz/Canvas is used to visualize temporal variations in the function u(x,t). Tikz provides two graphical transformation methods: a coordinate transformation that only affects coordinates and a canvas transformation that affects the entire canvas. This transformation is used to illustrate the influence of time fluctuations on molecular diffusion in the aspects of coordinates, line thickness, gradient, and text.

Keywords: Diffusion, Gaussian, Tikz, Canvas

ABSTRAK

Difusi, sebagai proses fundamental dalam kehidupan dan alam semesta, memainkan peran penting dalam berbagai konteks. Persamaan difusi linear satu dimensi (1D) menggambarkan difusi molekuler dengan gradien konsentrasi dalam arah y dan z yang nol, dimana D adalah koefisien difusi konstan. Penelitian ini memfokuskan pada kasus pipa panjang tak berhingga dan sempit dengan radius a, dimana zat pelacak dengan massa M disuntikkan merata di seluruh penampang daerah $A = \pi a^2$ pada $x = 0$ dan $t = 0$. Dengan konsentrasi awal yang sangat kecil, penelitian bertujuan menemukan solusi penyebaran konsentrasi seiring waktu yang dipengaruhi oleh difusi molekuler. Selain Plot 3D, alternatif Plot 2D dalam bidang koordinat yang berbeda menggunakan Tikz/Canvas digunakan untuk memvisualisasikan variasi waktu pada fungsi $u(x,t)$. Tikz memberikan dua metode transformasi grafis: transformasi koordinat yang memengaruhi koordinat saja, dan transformasi Canvas yang memengaruhi seluruh Canvas. Transformasi ini digunakan untuk mengilustrasikan dampak variasi waktu pada difusi molekuler dalam aspek koordinat, ketebalan garis, gradiasi warna dan teks.

Kata Kunci: Difusi, Gaussian, Tikz, Canvas

PENDAHULUAN

Difusi adalah salah satu proses alami yang mendasar dan penting dalam berbagai aspek kehidupan dan alam semesta. Proses ini terjadi ketika zat atau partikel berpindah dari daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah dengan konsentrasi rendah tanpa adanya gaya dorong eksternal yang signifikan. Difusi terjadi dalam berbagai konteks, mulai dari dunia sel dalam tubuh organisme hingga fenomena alam seperti perambatan panas. Dalam tulisan ini, kita akan fokus pada difusi dalam konteks Persamaan Difusi Linear Satu Dimensi.

Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat melihat contoh-contoh dari proses difusi ini. Misalnya, ketika kita menaruh sepotong gula dalam secangkir air panas, gula akan larut dan tersebar merata dalam air. Ini adalah contoh dari peristiwa difusi zat terlarut dalam cairan. Difusi dalam lingkungan air sangat penting karena memungkinkan organisme akuatik untuk mendapatkan nutrisi, oksigen, dan karbon dioksida yang mereka butuhkan untuk bertahan hidup dan berkembang.

Persamaan Difusi Linear Satu Dimensi adalah salah satu cara matematika untuk menggambarkan proses difusi. Persamaan ini merupakan penyederhanaan dari Persamaan Difusi yang lebih umum, di mana diasumsikan bahwa gradien konsentrasi dalam arah vertikal dan horizontal adalah nol. Dengan kata lain, kita hanya mempertimbangkan perpindahan zat dalam satu dimensi spasial (misalnya, sepanjang sumbu *x*). Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut \cite{jac}\cite{gra}:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

dengan *initial* dan *boundary conditions*

$$u(x, t = 0) = f(x), \qquad u(x = \pm\infty, t) = 0 \tag{2}$$

Di mana u adalah konsentrasi zat atau partikel pada suatu titik dalam ruang dan waktu, t adalah waktu, x adalah posisi dalam satu dimensi spasial, dan D adalah koefisien difusi yang konstan atau mungkin bervariasi secara spasial.

Jika memperhatikan bentuk Persamaan (3), kita dapat melihat bahwa persamaan tersebut memiliki kemiripan dengan persamaan panas (*heat equation*) dalam konteks termodinamika. Dalam persamaan panas, koefisien difusi D digantikan oleh koefisien konduktivitas panas seperti c^2 \cite{heat1}, k \cite{heat2} atau α \cite{heat3}. Pengamatan ini memiliki implikasi penting karena solusi untuk persamaan panas telah dikembangkan dengan baik dalam bidang matematika. Oleh karena itu, jika kita dapat menemukan solusi untuk persamaan panas, kita dapat mengadaptasi solusi tersebut untuk memahami dan memodelkan proses difusi ini dengan lebih baik.

Pada kasus pipa panjang tak berhingga dan sempit (radius a), suatu zat pelacak yang telah diberi warna dengan masa M disuntikkan merata di seluruh penampang daerah $A = \pi r^2$ pada titik $x = 0$ dan waktu $t = 0$. Lebar mula-mula konsentrasi pelacak tersebut sangat kecil dan ketebalan dalam arah x nya sangat tipis. Untuk menyatakan kondisi awal seperti itu, secara matematis kita menggunakan fungsi delta Dirac.

$$u(x, 0) = \frac{M}{A}\delta(x) \tag{3}$$

dimana $\delta(x)$ bernilai nol dimanapun kecuali di $x = 0$, yang mana nilainya mencapai tak hingga, akan tetapi integral fungsi delta dari $x = -\infty$ sampai $x = +\infty$ adalah 1.

Selanjutnya perlu dicari fungsi pengganti $\delta(x)$ pada Persamaan (3) sehingga diperoleh $u(x,t)$ yang berlaku pada sembarang x dan t. Misal didefinisikan fungsi baru

$$u(x, t) = \frac{M}{A}Tf(\eta) \tag{4}$$

dengan

$$\eta = xT, \text{ dan } \quad T = \frac{1}{\sqrt{Dt}} \tag{5}$$

Menggunakan transformasi koordinat pada Persamaan (5), Persamaan (1) dapat dikonversi menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\alpha\eta f) = 0 \tag{6}$$

dengan nilai $\alpha = 1/2$. Solusi Persamaan (6) adalah

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{\alpha}{2}\eta^2} \tag{7}$$

Substitusi Persamaan (7) dan (5) bagian kanan ke Persamaan (4) diperoleh

$$u(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan solusi Persamaan Difusi Linear Satu Dimensi. Untuk melihat lebih jelas bagaimana variasi waktu berdampak pada grafik fungsi $u(x,t)$, umumnya koordinat waktu t diperlakukan sebagai dimensi ke-2 setelah posisi x, selanjutnya dilakukan plot 3D. Akan tetapi di sini akan digunakan alternatif lain yaitu melakukan plot 2D tetapi dalam bidang koordinat yang berbeda menggunakan TikZ/canvas.

METODE

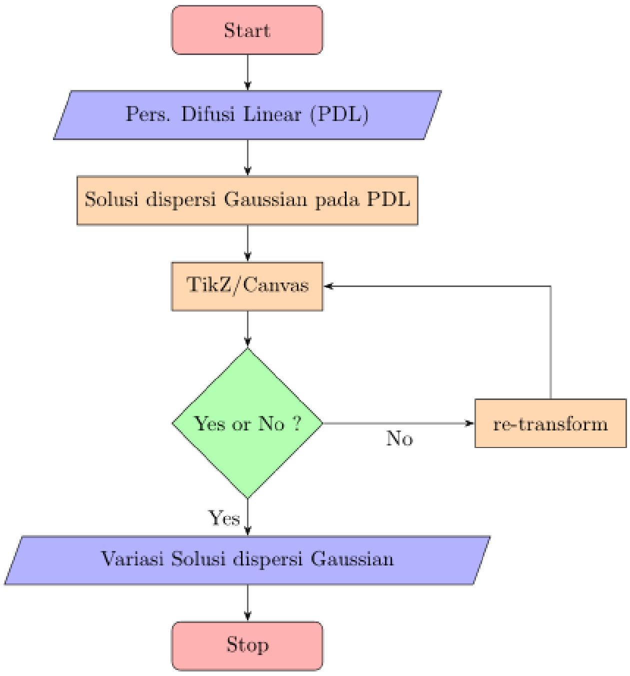
TikZ diperkenalkan dalam versi 0.95 dari PGF oleh Till Tantau. TikZ adalah singkatan dari "*TikZ ist kein Zeichenprogramm*", dalam bahasa Jerman yang berarti "*TikZ bukan program gambar*". PGF adalah singkatan dari "*Portable Graphics Format*". PGF/TikZ adalah sepasang bahasa untuk menghasilkan grafik vektor dengan fitur standar termasuk menggambar titik, garis, panah, lintasan, lingkaran, elips, dan poligon. PGF adalah bahasa tingkat lebih rendah, sementara TikZ adalah kumpulan makro tingkat lebih tinggi yang menggunakan PGF. Perintah PGF dan TikZ tingkat atas dijalankan sebagai makro TeX.

TikZmenawarkan dua cara berbeda untuk melakukan pergeseran, penskalaan, dan rotasi atau yang dikenal sebagai transformasi grafis \cite{tikz}:

- Menerapkan transformasi koordinat pada semua koordinat
- Menerapkan transformasi canvas pada kanvas tempat Anda menggambar

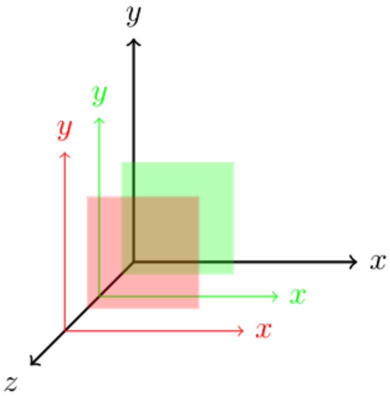
Aspek penting dari transformasi koordinat adalah bahwa ia hanya berlaku untuk koordinat saja. Transformasi koordinat tidak berlaku untuk, misalnya, ketebalan garis, gradasi warna, atau teks. Sedangkan efek transformasi canvas adalah segalanya akan mengalami transformasi baik itu koordinat, ketebalan garis, gradasi warna, atau teks.

Untuk melihat lebih jelas bagaimana variasi waktu berdampak pada grafik fungsi $u(x,t)$ pada Persamaan (8) di sini akan digunakan TikZ/canvas. Diagram alir pada penelitian ini tampak dalam Gambar 1.



Gambar 1. Diagram alir penelitian

Contoh implementsi transformasi canvas tampak dalam Gambar 2. Sejumlah contoh kode implementasi transformasi canvas dapat dijumpai pada \cite{canvas1}\cite{canvas2}. Hasil implementsi transformasi canvas dari kode di atas tampak dalam Gambar 2.



Gambar 2. Contoh hasil implementasi transformasi canvas.

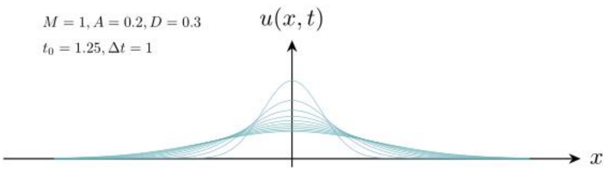
Selanjutnya, untuk mendapatkan grafik variasi solusi dispersi Gaussian diperlukan dua langkah pemrograman yaitu:

- Menggambar grafik solusi pada satu kanvas
- Melakukan transformasi canvas secara berulang (*loops*)

Perulangan atau *loops* adalah salah satu konsep pemrograman yang paling dasar termasuk dalam TikZ. Paket TikZ menyediakan perintah \foreach, yang merupakan perintah serupa dengan perulangan yang sudah dikenal dalam pemrograman. Perintah ini akan membantu kita untuk menggambar sejumlah bentuk serupa hanya dengan mengubah parameter. Sejumlah contoh kode implementasi perulangan dapat dijumpai pada \cite{loops1}\cite{loops2}.

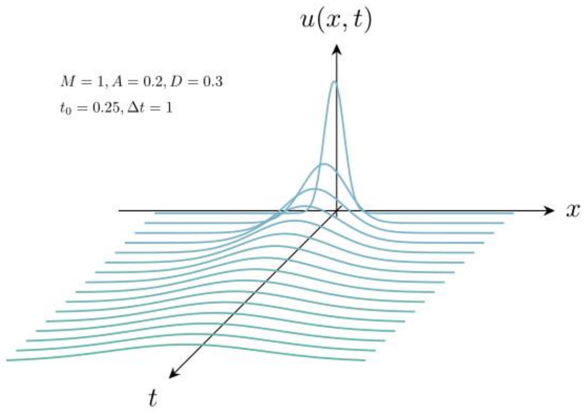
HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan (8) dikenal juga sebagai solusi dispersi Gaussian yang merupakan solusi klasik dalam mekanika fluida lingkungan. Plot solusi dispersi Gaussian pada sejumlah step waktu *t* tampak dalam Gambar 3.



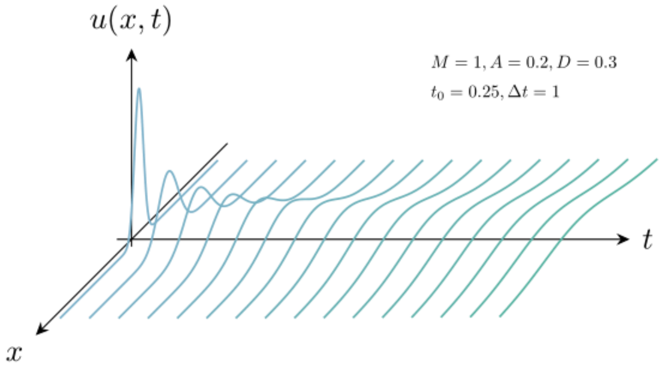
Gambar 3. Grafik fungsi $u(x,t)$ pada waktu $t_n = t_0 + n\Delta t$, dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$ dst.

Tampak bahwa efek variasi waktu pada grafik solusi dispersi Gaussian tampak tidak jelas pada Gambar 3 yang menerapkan plot grafik secara berhimpitan. Selanjutnya Gambar 4 merupakan hasil implementasi transformasi canvas dan perulangan.



Gambar 4. Grafik fungsi $u(x,t)$ pada waktu $t_n = t_0 + n\Delta t$, dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$ dst, yang disusun menggunakan transformasi canvas

Tampak bahwa efek variasi waktu pada grafik solusi dispersi Gaussian lebih jelas terlihat pada Gambar 4 daripada Gambar 3. Pada Gambar 5 disajikan grafik fungsi $u(x,t)$ dari sudut pengamatan yang berbeda.



Gambar 5. Grafik fungsi $u(x,t)$ pada waktu $t_n = t_0 + n\Delta t$, dengan $n = 0, 1, 2, ...$ dst, yang disusun menggunakan transformasi canvas.

Berikut ini merupakan kode dasar implementasi transformasi canvas dan perulangan untuk mendapatkan grafik variasi solusi dispersi Gaussian pada Gamar 4.

```
\documentclass[border=2mm]{standalone}
\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{3d}
\makeatletter
\tikzoption{canvas is plane}[]{\@setOxy#1}
\def\@setOxy O(#1,#2,#3)x(#4,#5,#6)y(#7,#8,#9)%
  {\def\tikz@plane@origin{\pgfpointxyz{#1}{#2}{#3}}%
   \def\tikz@plane@x{\pgfpointxyz{#4}{#5}{#6}}%
   \def\tikz@plane@y{\pgfpointxyz{#7}{#8}{#9}}%
   \tikz@canvas@is@plane
  }
\makeatother
\begin{document}
\begin{tikzpicture}

\def\M{1} % definisi massa M
\def\A{0.2} % definisi luas A
\def\D{0.3} % definisi koefisien difusi D

\draw[thick,->] (0,0,0)--(17,0,0) node[right]{$t$};
\draw[thick,->] (0,-1,0) -- (0,7,0) node[above]{$u(x,t)$};
\draw[thick,->] (0,0,-9) -- (0,0,9) node[below left]{$x$};

\newcommand\difusi[2]{
% canvas is yz plane at x=\t
\begin{scope}[canvas is plane={O(\t,0,0)x(\t,1,0)y(\t,0,1)},black]
\pgfmathsetmacro{\K}{\M/(\A*sqrt(4*pi*\D*\t))}
\draw[samples=100, domain=-8:8, smooth, variable=\x, blue] plot ({\K*exp(-\x*\x/(4*\D*\t))}, {\x});
\end{scope}
}
\foreach \t in {0.25,1.25,2.25,...,15.25}{
\difusi{\t};
}
\end{tikzpicture}
\end{document}
\end{lstlisting}
```

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa: Penerapan transformasi canvas pada plot 2D dapat memperlihatkan efek variasi waktu pada grafik solusi dispersi Gaussian dengan lebih jelas bila dibandingkan dengan penerapan plot 2D secara berhimpitan. Penerapan transformasi canvas pada plot 2D dapat menjadi alternatif plot 3D.

DAFTAR PUSTAKA

Dominik Peters. (2023). 88 Repeating Things: The Foreach Statement. PGF/TikZ Manual Unofficial HTML Version. 24 Juni 2023. https://tikz.dev/pgffor

Dominik Peters. (2023). Three Dimensional Drawing Library. PGF/TikZ Manual Unofficial HTML Version. 24 Juni 2023. https://tikz.dev/library-3d\#sec-40.1

Gernot. (2017). TiKZ: How to define new 2D canvas. https://tex.stackexchange.com/questions/353357/tikz-how-to-define-new-2d-canvas. Stackexchange. 12 Februari 2017.

Graham W. Griffiths dan William E. Schiesser. (2010). Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations. Bab. 3 hal.47. Academic Press. DOI: 10.1016/B978-0-12-384652-5.00003-0.

Hikmet Caglar, Mehmet Ozer dan Nazan Caglar. (2008). The numerical solution of the one-dimensional heat equation by using third degree B-spline functions. J. Chaos, Solitons and Fractals 38 (2008) 1197–1201. doi:10.1016/j.chaos.2007.01.056.

Hooshmandasl M. R, Heydari M.H dan Maalek Ghaini F.M. (2012). Numerical Solution of the One-Dimensional Heat Equation by Using Chebyshev Wavelets Method. J Applied Computat Mathemat 1:122. doi:10.4172/2168-9679.1000122

Lencha Tamiru Abdisa. (2021). One Dimensional Heat Equation and its Solution by the Methods of Separation of Variables, Fourier Series and Fourier Transform. J Appl Computat Math, Volume 10:5, 2021.

M. H. Jacobs. (1967). Diffusion Processes. Bab. 5 hal.23. Springer-Verlag New York Inc. DOI 10.1007/978-3-642-86414-8

SIPB. (2023). 15 Repeating Things: The Foreach Statement. Massachusetts Institute of Technology (MIT). https://stuff.mit.edu/afs/athena/contrib/tex-contrib/beamer/pgf-1.01/doc/generic/pgf/version-for-tex4ht/en/pgfmanualse15.html

Till Tantau. (2023). The TikZ and PGF Packages Manual for version 3.1.10. Institut für Theoretische Informatik Universität zu Lübeck, 11 September 2023.