ISSN 2621-7856
JURNAL SAINTIKA UNPAM
Vol.1. No. 1, Juli 2018 (74-97)

TOPOLOGI KUAT DAN LEMAH PADA KOLEKSI OPERATOR KONTRAKSI $\mathcal{C}_T(\mathcal{H})$

***Yulianti Rusdiana*[1], *Dzikrullah Akbar*[2]**
[1]*Program Studi Matematika, FMIPA, UNPAM*
yulianti.rusdiana@gmail.com
[2]*Program Studi DIV Klimatologi, STMKG*
dzikrullah.akbar@stmkg.ac.id

ABSTRACT

Every Hilbert space is topological space. Then, the continuous linear mapping is also topological space. Strong Topology and weak topology corresponding to strong convergence and weak convergence. Let $\mathcal{H}$ is a Hilbert space, on contraction operators, denoted $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, is metrizable. In this Paper, we study the strong operator topology and weak operator topology on $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. We can show that strong operator topology and weak operator topology is separable completely metrizable topological space.

Keyword :*strong operator topology, weak operator topology, mertizable*

ABSTRAK

Setiap ruang Hilbert merupakan ruang topologis. Oleh karena itu, koleksi semua pemetaan linear kontinu pada ruang tersebut juga merupakan ruang topologis. Ruang topologis kuat dan ruang topologis lemah berkorespondensi dengan kekovergenan kuat dan kekovergenan lemah. Jika diberikan ruang Hilbert $\mathcal{H}$, pada koleksi semua operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, dapat dibangun oleh suatu ruang metrik. Paper ini membahas tentang topologi operator kuat dan topologi operator lemah pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Ruang topologis termetrik lengkap adalah ruang topologis yang dibangun dari suatu ruang metrik lengkap. Dapat ditunjukkan bahwa, ruang topologis operator kuat dan ruang topologis operator lemah merupakan ruang topologis yang separabel termetrik lengkap.

Kata Kunci :topologi operator kuat, topologi operator lemah, termetrik

1. PENDAHULUAN

Kajian tentang ruang Hilbert telah banyak dilakukan, satu diantaranya penelitian oleh Eisner yang mengkaji tentang sifat tipikal pada ruang Hilbert di beberapa ruang topologis. Eisner mengatakan bahwa struktur di ruang Hilbert tidak hanya mengijinkan membangun teori spektral tetapi juga fasilitas untuk mengkonstruksi operator menggunakan dekomposisi orthogonal. Bersumber pada penelitian yang dilakukan Eisner, penulis pertama dalam tesisnya melakukan kajian tentang sifat tipikal operator pada ruang Hilbert. Khususnya dikenakan pada operator kontraksi di ruang topologis kuat.

Dalam tulisan ini, penulis tertarik untuk mengkaji ruang topologis kuat dan ruang topologis lemah berdasarkan metrik yang ditulis Eisner pada papernya. Namun demikian, topologi yang dibahas dibatasi hanya pada koleksi operator kontraksi di ruang Hilbert. Karena operator kontraksi selalu terbatas, maka ruang topologis yang dibangun dari koleksi operator kontraksi dapat diturunkan dari topologi pada operator terbatas.

Investigasi dilakukan dengan membentuk metrik yang membangkitkan ruang topologis. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa metrik tersebut membangkitkan topologi kuat dan topologi lemah pada koleksi operator kontraksi. Pembahasan dilakukan dengan mendefinisikan basis dari ruang topologis yang dibangun dari ruang metrik, kemudian diamati kesamaan basis tersebut dengan basis topologi kuat dan lemah pada ruang Hilbert. Dengan demikian, metrik yang dibentuk membangkitkan topologi kuat dan topologi lemah pada ruang operator kontraksi. lebih lanjut, koleksi operator kontraksi dengan metrik yang dibentuk merupakan ruang metrik yang separabel dan lengkap.

2. LANDASAN TEORI

2.1. Ruang Hilbert

Diberikan sebarang bilangan kompleks $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bilangan Kompleks $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ didefinisikan sebagai konjugat dari λ. Beberapa sifat umum konjugat adalah $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, $\overline{(\lambda + \mu)} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$, $\overline{(\lambda\mu)} = \overline{\lambda}\overline{\mu}$, $|\lambda| = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda}$, dan $\overline{\lambda} = \lambda$ jika dan hanya jika $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.1 *Ruang vektor $\mathcal{P}$ atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ disebut ruang hasil kali dalam atau ruang pre-Hilbert jika dilengkapi dengan fungsi hasil kali dalam, yaitu fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{P}$ dan α skalar berlaku sifat sebagai berikut.*

(i). $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(ii). $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(iii). $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

(iv). $\langle x, x \rangle > 0$ *dan* $\langle x, x \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $x = \hat{0}$.

Contoh 2.2 Himpunan $\mathcal{P} = \ell^2 = \{x = \{x_k\} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ merupakan ruang pre-Hilbert dengan fungsi hasil kali dalam

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad \text{untuk setiap } x, y \in \mathcal{P}.$$

Teorema 2.3 *Jika $\mathcal{P}$ ruang pre-Hilbert, maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{P}$ dan α skalar berlaku sifat sebagai berikut.*

(1). $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

(2). $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(3). $\langle x, \hat{0}\rangle = \langle \hat{0}, y\rangle$.

(4). $\langle x - y, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle$ *dan* $\langle x, y - z\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle$.

(5). $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$, *untuk setiap* $z \in \mathcal{H}$ *jika dan hanya jika* $x = y$.

Menurut Definisi 2.1 dan Teorema 2.3, hasil kali dalam bersifat linear terhadap komponen pertama dan bersifat linear konjugat terhadap komponen kedua. Selanjutnya, didefinisikan fungsi $\|\cdot\| : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pada Definisi 2.4 berikut.

Definisi 2.4 *Diberikan ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$. Didefinisikan fungsi $\|\cdot\|$: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \textit{untuk setiap } x \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

Teorema 2.5 *Fungsi $\|\cdot\|$ pada persamaan (1) memenuhi sifat berikut.*

(i). $\|x\| \geq 0$, *untuk setiap* $x \in \mathcal{P}$.

(ii). $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = \hat{0}$.

(iii). $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, *untuk setiap* $x \in \mathcal{P}$ *dan* α *skalar.*

Berdasarkan Definisi 2.4 diperoleh sifat-sifat pada ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$.

Teorema 2.6 ***(Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz)*** *Jika x dan y dua vektor pada ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$ dan fungsi $\|\cdot\| : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ seperti pada persamaan (1), maka*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{P}$ dengan $\mathcal{P}$ ruang hasil kali dalam. Dengan demikian, diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 2.7 *Setiap ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$ merupakan ruang bernorma dengan norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Contoh 2.8 Himpunan $\mathcal{P} = \ell^2$ merupakan ruang bernorma dengan norma

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sifat penjumlahan pada ruang pre-Hilbert dapat dinyatakan dalam bentuk hukum paralelogram dan identitas polarisasi.

Teorema 2.9 ***(Hukum Paralelogram)*** *Diberikan sebarang ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$. Untuk setiap $x, y \in \mathcal{P}$ berlaku*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Teorema 2.10 ***(Identitas Polarisasi)*** *Diberikan sebarang ruang pre-Hilbert $\mathcal{P}$. Untuk setiap $x, y \in \mathcal{P}$, berlaku*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right).$$

Menurut Teorema 2.7 diperoleh bahwa setiap ruang pre-Hilbert merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, sehingga sifat-sifat pada ruang bernorma berlaku pada ruang pre-Hilbert. Untuk sebarang ruang bernorma merupakan ruang metrik dengan mendefinisikan metrik $d(x,y) = \|x-y\|$. Pada ruang metrik dikenal konsep tentang barisan dan kekonvergenan barisan, begitu pula pada ruang bernorma. Berikut diuraikan definisi kekonvergenan pada ruang bernorma.

Definisi 2.11 *Diberikan sebarang ruang bernorma $\mathcal{H}$ dan $x_n, x \in \mathcal{H}$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x, ditulis $x_n \to x$ atau $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, jika $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ atau $\|x_n - x\| \to 0$ untuk $n \to \infty$.*

Definisi 2.12 *Diberikan sebarang ruang bernorma $\mathcal{H}$ dan $x_n, x \in \mathcal{H}$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*

Setiap barisan yang konvergen pada ruang pre-Hilbert merupakan barisan Cauchy, sebaliknya belum tentu berlaku. Dalam hal setiap barisan Cauchy pada ruang pre-Hilbert merupakan barisan yang konvergen, ruang pre-Hilbert tersebut lengkap.

Definisi 2.13 *Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert.*

Contoh 2.14 Himpunan $\mathcal{P} = \ell^2$ pada Contoh 2.2, merupakan ruang pre-Hilbert lengkap yang berarti $\mathcal{P}$ merupakan ruang Hilbert.

2.2. Operator Kontraksi

Definisi 2.15 *Operator linear kontinu $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dikatakan kontraksi apabila $\|A(x)\| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in \mathcal{H}$.*

Contoh 2.16 Pada ruang Hilbert ℓ^2, didefinisikan operator U dengan

$$U(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}) = \{0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\},$$

untuk $\hat{x} = \{\alpha_n\} \in \ell^2$. Operator U merupakan operator kontraksi.

Teorema 2.17 *Jika $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ operator linear kontinu, maka pernyataan berikut ekuivalen.*

(1). operator A kontraksi.

(2). $\|A\| \leq 1$.

(3). $A^*A \leq I$.

(4). $AA^* \leq I$.

(5). operator A^* kontraksi.

(6). operator A^*A kontraksi.

2.3. Ruang Topologis

Diberikan sebarang himpunan tak kosong $\mathcal{X}$. Himpunan $2^{\mathcal{X}} = \{A \ : \ A \subseteq \mathcal{X}\}$ disebut himpunan kuasa (*power set*) dari $\mathcal{X}$. Himpunan bagian dari himpunan kuasa tersebut dapat memberikan pengertian topologi pada $\mathcal{X}$.

Definisi 2.18 *Diberikan himpunan $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Koleksi himpunan $\tau \subseteq 2^{\mathcal{X}}$ disebut topologi pada $\mathcal{X}$ jika memenuhi tiga hal berikut.*

(i). $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau$.

(ii). Jika $U, V \in \tau$ maka $U \cap V \in \tau$.

(iii). Jika $\sigma \subseteq \tau$ maka $\bigcup_{U \in \sigma} U \in \tau$.

Selanjutnya, pasangan $(\mathcal{X}, \tau)$ disebut ruang topologis. Dalam hal tidak menimbulkan kerancuan, ruang topologis $(\mathcal{X}, \tau)$ dapat ditulis dengan $\mathcal{X}$. Setiap himpunan bagian $\mathcal{X}$ yang merupakan anggota τ merupakan himpunan terbuka.

Irisan dari dua topologi pada himpunan $\mathcal{X}$ juga merupakan topologi pada $\mathcal{X}$, namun gabungannya tidak selalu merupakan topologi pada $\mathcal{X}$. Selanjutnya, diberikan pengertian mengenai basis dari suatu topologi.

Definisi 2.19 *Diberikan himpunan $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Basis untuk topologi pada $\mathcal{X}$ adalah koleksi $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ sehingga memenuhi sifat-sifat berikut.*

(i). Untuk setiap $x \in \mathcal{X}$ada $U \in \mathcal{B}$ dengan $x \in U$.

(ii). Jika $x \in U_1 \cap U_2$, dengan $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, maka terdapat $U \in \mathcal{B}$ dengan $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Jika $\mathcal{B}$ memenuhi kedua kondisi di atas, maka topologi τ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{B}$ didefinisikan sebagai berikut: Himpunan bagian $U \subseteq \mathcal{X}$ dikatakan terbuka di $\mathcal{X}$ (yaitu anggota topologi τ) jika untuk setiap $x \in U$, terdapat anggota basis $B \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B$ dan $B \subseteq U$. Setiap anggota basis itu sendiri merupakan anggota topologi τ.

Setiap ruang metrik merupakan ruang topologis dengan koleksi semua bola terbuka pada ruang metrik merupakan basis untuk topologinya. Berdasarkan Definisi 2.19, diperoleh sifat yang mengatakan bahwa topologi τ merupakan koleksi dari semua gabungan anggota basisnya.

Teorema 2.20 *Diberikan $(\mathcal{X}, \tau)$ ruang topologis. Jika $\mathcal{B}$ basis untuk topologi τ, maka untuk setiap himpunan terbuka di dalam τ dapat dinyatakan sebagai gabungan dari anggota-anggota $\mathcal{B}$.*

Di dalam ruang topologis $\mathcal{X}$, himpunan V disebut persekitaran titik x jika terdapat himpunan terbuka U sehingga $x \in U \subseteq V$. Koleksi $\mathcal{N}_x$ terdiri dari semua persekitaran titik $x \in \mathcal{X}$ disebut sistem persekitaran titik x. Selanjutnya, dari sistem persekitaran titik x tersebut dapat didefinisikan basis untuk sistem persekitaran titik x yang disebut basis persekitaran titik x.

Definisi 2.21 *Diberikan $(\mathcal{X}, \tau)$ ruang topologis, dan $x \in \mathcal{X}$. Koleksi $\mathcal{W}$ dari persekitaran titik x disebut basis persekitaran titik x jika untuk setiap persekitaran $V \in \mathcal{N}_x$ terdapat persekitaran $W \in \mathcal{W}$ sehingga $W \subseteq V$.*

Contoh 2.22 Diberikan ruang topologis biasa pada $\mathbb{R}$ dan himpunan

$$\mathcal{B}_a = \left\{ \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Setiap anggota dari $\mathcal{B}_a$ adalah persekitaran dari $a \in \mathbb{R}$ dan setiap persekitaran dari a memuat paling tidak satu anggota dari $\mathcal{B}_a$.

Teorema 2.23 *Koleksi $\mathcal{B} \subset \tau$ merupakan basis untuk topologi τ pada $\mathcal{X}$ jika dan hanya jika $\mathcal{B}$ memuat basis persekitaran x untuk setiap $x \in \mathcal{X}$.*

Untuk menunjukkan $\mathcal{S} \subset \tau$ merupakan basis bagian cukup ditunjukkan bahwa koleksi dari semua irisan sebanyak berhingga anggota-anggota $\mathcal{S}$ merupakan basis. Selanjutnya, dari suatu ruang metrik dapat dibangkitkan sebuah ruang topologis. Ruang topologis yang dibangkitkan oleh suatu metrik dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.24 *Ruang topologis $(\mathcal{X}, \tau)$ dikatakan metrizable jika ada metrik d pada $\mathcal{X}$ sehingga τ merupakan topologi yang dibangkitkan oleh metrik d pada $\mathcal{X}$. Ruang topologis $(\mathcal{X}, \tau)$ completely metrizable jika ada metrik d_0 pada $\mathcal{X}$ sehingga τ dibangkitkan oleh d_0 dan $(\mathcal{X}, \mathrm{d}_0)$ merupakan ruang metrik lengkap.*

Contoh 2.25 Diberikan ruang topologis diskrit $(\mathcal{X}, \tau_d)$. Didefinisikan metrik d dengan

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \neq y; \\ 0, & \text{jika } x = y. \end{cases}$$

Untuk setiap $y \in \mathcal{X}$, terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $y \in B_d(y, \varepsilon) = \{y\} \subseteq \mathcal{U}$. Jika $y \in B_d(y_1, \varepsilon_1) \cap B_d(y_2, \varepsilon_2)$, dapat dipilih $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1 - d(y, y_1), \varepsilon_2 - d(y, y_2)\}$ sehingga diperoleh $y \in B_d(y, \varepsilon) \subseteq B_d(y_1, \varepsilon_1) \cap B_d(y_2, \varepsilon_2)$. Akibatnya koleksi $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in \mathcal{X}\}$ merupakan basis untuk topologi pada $\mathcal{X}$. Dimisalkan τ_{B_d} adalah topologi yang dibangun oleh basis $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in \mathcal{X}\}$. Diperhatikan bahwa untuk $\varepsilon \leq 1$ diperoleh $B_d(x, \varepsilon) = \{x\}$. Untuk setiap himpunan terbuka U terdapat $\{x\} \subseteq U$ sehingga $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$. Diperoleh koleksi $\{\{x\} : x \in \mathcal{X}\}$ merupakan basis untuk topologi diskrit, sehingga $\tau_{B_d} = \tau_d$.

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas pengertian tentang topologi operator kuat dan topologi operator lemah pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dapat ditunjukkan bahwa topologi operator kuat dan topologi operator lemah merupakan ruang topologis yang separabel termetrik lengkap.

3.1. Topologi kuat pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$

Definisi konvergen kuat pada ruang operator disampaikan pada Definisi 3.1 sebagai berikut.

Definisi 3.1 *Diberikan $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ruang bernorma, dan fungsi T_n, T merupakan fungsi yang memetakan $\mathcal{X}$ ke $\mathcal{Y}$. Barisan $\{T_n\}$ dikatakan konvergen kuat ke T, ditulis $T_n \xrightarrow{s} T$ atau $T = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n$, jika untuk setiap $x \in \mathcal{X}$ berlaku $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0$, untuk $n \to \infty$.*

Selanjutnya, Teorema 3.5 berikut menunjukkan bahwa koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ merupakan ruang topologis kuat separabel yang termetrik lengkap *completely metrizable*, yaitu terdapat metrik separabel lengkap pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ yang membangun topologi kuat. Pembahasan lanjut pada subbab ini, $\mathcal{H}$ dimaksudkan sebagai ruang Hilbert klasik. Koleksi semua operator linear kontinu pada $\mathcal{H}$ dinotasikan dengan $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$.

Lemma 3.2 *Untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ dibentuk*

$$d_s(A,B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\|, \tag{2}$$

dengan $\{e_i\}$ basis ortonormal $\mathcal{H}$. Metrik d_s merupakan metrik pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dan d_s membangkitkan suatu topologi pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ yang dinotasikan dengan τ_{d_s}. Lebih lanjut, $(\mathcal{C}_t(\mathcal{H}), d_s)$ merupakan ruang metrik lengkap yang separabel.

Bukti. Diambil sebarang $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{L}_c(H)$ dengan $A_1 = A_2$ dan $B_1 = B_2$. Hal ini berarti untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku $A_1(x) = A_2(x)$ dan $B_1(x) = B_2(x)$. Diperhatikan bahwa

$$d_s(A_1, B_1) \quad = \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\|A_1(e_i) - B_1(e_i)\| = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\|A_2(e_i) - B_2(e_i)\| = d_s(A_2, B_2).$$

Jadi, d_s fungsi. Untuk setiap $A, B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ memenuhi beberapa sifat berikut.

1. $d_s(A,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| \geq 0$

   dan

   $$d_s(A,B) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| = 0 \Leftrightarrow \ \forall\, i, 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| = 0$$
   $$\Leftrightarrow \|A(e_i) - B(e_i)\| = 0 \Leftrightarrow \|A - B\| = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

2. $d_s(A,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|B(e_i) - A(e_i)\| = d_s(B,A).$

3. $d_s(A,C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - C(e_i)\|$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left\| \ A(e_i) - B(e_i) + B(e_i) - C(e_i) \ \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left\{ \ \|A(e_i) - B(e_i)\| + \|B(e_i) - C(e_i)\| \ \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \|A(e_i) - B(e_i)\| + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \|B(e_i) - C(e_i)\| \\
&\leq d_s(A, B) + d_s(B, C).
\end{aligned}
$$

Diperoleh d_s metrik pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Lebih lanjut, dibentuk

$$\mathcal{B}(A, r) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) \ : \ d_s(A, B) < r\}.$$

Akan ditunjukkan koleksi $\{\mathcal{B}(A, r) \ : \ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ merupakan basis untuk topologi τ_{d_s} pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

(1). Untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ terdapat $\mathcal{B}(A, r) \in \{\mathcal{B}(A, r) \ : \ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ sehingga $A \in \mathcal{B}(A, r)$.

(2). Jika $C \in \mathcal{B}(A, r_1) \cap \mathcal{B}(B, r_2)$ dengan $\mathcal{B}(A, r_1), \mathcal{B}(B, r_2) \in \{\mathcal{B}(A, r) \ : \ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$, maka terdapat $r_3 = \frac{1}{2} \min\{r_1 - d_s(A, C), r_2 - d_s(B, C)\}$ sedemikian hingga diperoleh $C \in \mathcal{B}(C, r_3) \subseteq \mathcal{B}(A, r_1) \cap \mathcal{B}(B, r_2)$.

Diperoleh koleksi $\{\mathcal{B}(A, r) \ : \ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ merupakan basis untuk topologi τ_{d_s} pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Akibatnya, metrik d_s membangkitkan suatu topologi pada $\mathcal{C}_t(H)$, dinotasikan dengan τ_{d_s}. Diperhatikan bahwa $\mathcal{H}$ ruang Hilbert separabel berdimensi tak hingga dengan $\{e_i\} \subseteq \mathcal{H}$ merupakan basis ortonormal $\mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa himpunan

$$\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) \ : \ \begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N} \ni A(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \ n \in \mathbb{N}, \\ \alpha_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle \in \mathbb{C} \ni Re(\alpha_{ij}), Im(\alpha_{ij}) \in \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

merupakan himpunan bagian yang rapat dan terhitung di $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Diambil sebarang $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Hal ini berarti, $A(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Dengan demikian diperoleh,

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j.$$

Didefinisikan $A_n \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sehingga $A_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle A(x), e_j \rangle e_j$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. Diberikan $x, y \in \mathcal{H}$ dengan $x = y$, diperoleh

$$A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle A(x), e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle A(y), e_j \rangle e_j = A_n(y).$$

Jadi A_n fungsi. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in \mathcal{H}$, berlaku

$$\begin{aligned}
\|A_n(x)\|^2 &= \left\| A_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle A_n(e_i) \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \sum_{j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \| \langle x, e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \|^2 \leq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Diperoleh A_n kontraksi. Lebih lanjut, dengan $\alpha_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle$, bilangan kompleks yang bagian real dan imajinernya rasional diperoleh $A_n \in \mathcal{F}$. Untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|A(e_i) - A_n(e_i)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j - \sum_{j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \| \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \|^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle A(e_i), e_j \rangle|^2 \to 0, \text{untuk } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Hal ini berarti, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, dan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\|A_k(e_i) - A(e_i)\| < \varepsilon$. Akibatnya,

$$d_s(A, A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \|A(e_i) - A_n(e_i)\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

Jadi, untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ terdapat $A_n \in \mathcal{F}$ sehingga $A_n \to A$ untuk $n \to \infty$. Akibatnya $\mathcal{F}$ merupakan himpunan bagian terhitung yang rapat dari $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ sehingga $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dengan metrik d_s merupakan ruang metrik separabel.

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_k\} \subseteq \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Diberikan sebarang $N \in \mathbb{N}$ dan $\varepsilon > 0$. Karena $\{A_k\}$ barisan Cauchy maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $j, k \geq n_0$ berlaku

$$d_s(A_j, A_k) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Dengan demikian $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A_j(e_i) - A_k(e_i)\| < \frac{\varepsilon}{2^N}$, sehingga berlaku

$$\|A_j(e_N) - A_k(e_N)\| \quad \leq 2^N \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A_j(e_i) - A_k(e_i)\|\right) < 2^N \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon.$$

Jadi, $\{A_k(e_N)\}$ barisan Cauchy di $\mathcal{H}$. Oleh karena itu, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $\{A_k(e_i)\}$ barisan Cauchy di $\mathcal{H}$. Karena $\mathcal{H}$ lengkap, diperoleh $\{A_k(e_i)\}$ konvergen ke suatu $y_i \in \mathcal{H}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ dan untuk $k \to \infty$ berlaku $A_k(e_i) \to y_i$, maka diperoleh $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_k(e_i) \to \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$. Akibatnya, dapat didefinisikan fungsi $A \ : \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sehingga

$$A(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_j(e_i),$$

dengan $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Operator A kontraksi sebab untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|^2 &= \left\|\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_j(e_i)\right\|^2 = \lim_{j\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_j(e_i)\right\|^2 \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \|A_j(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \lim_{j\to\infty} \|A_j(e_i)\|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \lim_{j\to\infty} \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|A(e_i) - A_k(e_i)\| = \left\|\lim_{j\to\infty} A_j(e_i) - A_k(e_i)\right\| = \lim_{j\to\infty} \|A_j(e_i) - A_k(e_i)\| < \varepsilon.$$

Akibatnya,

$$d_s(A, A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - A_k(e_i)\| < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon = \varepsilon.$$

Diperoleh $\{A_k\}$ konvergen ke $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Jadi $(\mathcal{C}_t(\mathcal{H}), d_s)$ merupakan ruang metrik separabel lengkap. ■

Lemma 3.3 *Koleksi dari semua himpunan*

$$\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) \ : \ \|A(x_i) - B(x_i)\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$$

dengan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$*,* $\overline{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$*, dan* $\varepsilon > 0$ *merupakan basis untuk topologi kuat pada* $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$*.*

Bukti. Himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$ merupakan anggota basis topologi pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, sebab

1. Untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in \mathcal{H}$, berlaku $\|A(x) - A(x)\| = 0 < \varepsilon$. Jadi terdapat $\{x_i\}_{i=1}^n$ dan $\varepsilon > 0$ sehingga $A \in \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

2. Jika himpunan $B \in \mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{y}, \delta)$, dengan $\mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \varepsilon)$ dan $\mathcal{O}_m(A_2, \overline{y}, \delta)$ anggota $\{\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), \{x_i\}_{i=1}^n, \varepsilon > 0\}$, maka untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$ berlaku $\|A_1(x_i) - B(x_i)\| < \varepsilon$ dan $\|A_2(y_j) - B(y_j)\| < \delta$. Dapat dipilih barisan $\{z_p\}_{p=1}^k$ yang termuat di dalam $\{x_i\}_{i=1}^n \cap \{y_j\}_{j=1}^m$, dengan $k \leq n$ dan $k \leq m$. Dengan demikian, $z_p \in \{x_i\}_{i=1}^n$ dan $z_p \in \{y_j\}_{j=1}^m$, untuk setiap $p = 1, 2, \cdots, k$. Selanjutnya, dapat dipilih $\delta_0 = \min\{\varepsilon - \|A_1(z_p) - B(z_p)\|, \delta - \|A_2(z_p) - B(z_p)\|\}$. Diperoleh $\mathcal{O}_k(B, \overline{z}, \delta_0)$ anggota $\{\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), \{x_i\}_{i=1}^n, \varepsilon > 0\}$. Diperhatikan bahwa, untuk setiap $C \in \mathcal{O}_k(B, \overline{z}, \delta_0)$, hal ini berarti $\|B(z_p) - C(z_p)\| < \delta_0$ dengan $p = 1, 2, \cdots, k$. Karena setiap $p = 1, 2, \cdots, k$ berlaku $z_p \in \{x_i\}_{i=1}^n$ dan $z_p \in \{y_j\}_{j=1}^m$ maka $\|A_1(z_p) - B(z_p)\| < \varepsilon$ dan $\|A_2(z_p) - B(z_p)\| < \delta$. Dengan demikian, diperoleh
$$\begin{aligned} \|A_1(z_p) - C(z_p)\| &\leq \|A_1(z_p) - B(z_p)\| + \|B(z_p) - C(z_p)\| \\ &< \|A_1(z_p) - B(z_p)\| + (\varepsilon - \|A_1(z_p) - B(z_p)\|) = \varepsilon, \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} \|A_2(z_p) - C(z_p)\| &\leq \|A_2(z_p) - B(z_p)\| + \|B(z_p) - C(z_p)\| \\ &< \|A_2(z_p) - B(z_p)\| + (\delta - \|A_2(z_p) - B(z_p)\|) = \delta \end{aligned}$$
sehingga $C \in \mathcal{O}_k(A_1, \overline{z}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \varepsilon)$ dan $C \in \mathcal{O}_k(A_2, \overline{z}, \delta) \subseteq \mathcal{O}_m(A_2, \overline{y}, \delta)$. Akibatnya, $C \in \mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{y}, \delta)$. Jadi, terdapat B anggota $\mathcal{O}_k(B, \overline{z}$ dengan $\mathcal{O}_k(B, \overline{z}, \delta_0) \subseteq \mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{y}, \delta)$.

Katakan $\tau_{\mathcal{O}}$ menyatakan topologi yang dibangun oleh $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$ dan τ_s menyatakan topologi kuat. Akan ditunjukkan bahwa $\tau_s = \tau_{\mathcal{O}}$. Diambil sebarang himpunan terbuka $\mathcal{O} \in \tau_{\mathcal{O}}$. Dengan demikian, terdapat koleksi himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$. Untuk setiap $B \in \mathcal{O}$ terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $B \in \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \varepsilon)$. Hal ini berarti, untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, m$, berlaku $\|A(x_i) - B(x_i)\| < \varepsilon$. Akibatnya berlaku $B(x_i) \in \mathcal{B}(A(x_i), \varepsilon)$. Oleh karena itu, jika dipilih $U_i = \mathcal{B}(A(x_i), \varepsilon)$, untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, m$ diperoleh $B(x_i) \in U_i$. Akibatnya, $B \in \mathcal{B}_m(A(x), U)$ sehingga $B \in \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$. Jadi,

$$\tau_{\mathcal{O}} \subseteq \tau_s. \tag{3}$$

Sebaliknya, jika diambil sebarang himpunan terbuka $\mathcal{O} \in \tau_s$. Hal ini berarti, terdapat koleksi himpunan $\mathcal{B}_n(A(x), U)$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$. Untuk setiap B anggota $\mathcal{O}$ berlaku $B \in \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$ sehingga terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $B \in \mathcal{B}_m(A(x), U)$. Hal ini berarti, $B(x_i) \in U_i$ dengan $i = 1, 2, \cdots, m$. Karena U_i terbuka, terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $\mathcal{B}(B(x_i), \varepsilon)$ termuat di dalam U_i. Jika didefinisikan $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dengan

$$A(x) = \begin{cases} B(x), & \text{untuk } x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}; \\ \hat{0}, & \text{untuk } x \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}. \end{cases}$$

Jelas $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dan $\|A(x_i) - B(x_i)\| < \varepsilon$ dengan $i = 1, 2, \cdots, m$. maka diperoleh $B(x_i)$ anggota $\mathcal{B}(A(x_i), \varepsilon)$, sehingga $B \in \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \varepsilon)$. Lebih lanjut, $B \in \bigcup_n \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$. Jadi

$$\tau_s \subseteq \tau_{\mathcal{O}}. \tag{4}$$

Berdasarkan (3) dan (4) diperoleh $\tau_s = \tau_{\mathcal{O}}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa topologi yang dibangun oleh basis $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$ merupakan topologi kuat. ■

Lemma 3.4 *Diketahui $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Jika diberikan $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ dan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat bola terbuka $\mathcal{O} \in \tau_{d_s}$ sehingga $B \in \mathcal{O}$ dan jika $i < \mathrm{N}$ berakibat $\|A(e_i) - B(e_i)\| < \varepsilon$.*

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Jika η sebarang bilangan real positif, maka $d_s(A, B) < \eta$. Hal tersebut berakibat $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| < \eta$, sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} 2^{\mathrm{N}-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| < 2^{\mathrm{N}}\eta$. Jika $i < \mathrm{N}$, maka $\mathrm{N} - i > 0$. Jika dipilih $\eta = \frac{\varepsilon}{2^{\mathrm{N}}}$, maka $\|A(e_i) - B(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} 2^{\mathrm{N}-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| < 2^{\mathrm{N}}\eta = \varepsilon$.

Dibentuk $\mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| < \eta\}$. Diperoleh $\mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta)$ anggota $\{B(A, r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ dan jika terdapat bola terbuka $\mathcal{O} = \bigcup_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta)$, maka $\mathcal{O} \in \tau_{d_s}$. Karena $B \in \mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta)$, untuk suatu N, diperoleh $B \in \mathcal{O}$ dan jika $i < \mathrm{N}$ berakibat $\|A(e_i) - B(e_i)\| < \varepsilon$. ■

Teorema 3.5 *Metrik d_s pada persamaan (2) membangkitkan topologi kuat pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.*

Bukti. Diberikan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, telah dibuktikan bahwa $\mathcal{O}(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : d_s(A, B) < \varepsilon\}$ adalah anggota basis untuk topologi τ_{d_s}. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 3.3 diketahui bahwa himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \|A(x_i) - B(x_i)\| < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n\}$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ adalah anggota basis untuk τ_s. Akan ditunjukkan $\tau_{d_s} \subseteq \tau_s$. Diberikan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dan sebarang $\mathcal{O} \in \tau_{d_s}$. Untuk setiap $B \in \mathcal{O}$ berlaku $B \in \bigcup\limits_{r>0} \mathcal{O}(A, r)$, yang artinya terdapat $\eta > 0$ sehingga $B \in \mathcal{O}(A, \eta)$. Diberikan sebarang vektor berhingga $\{x_i\}_{i=1}^{m}$. Dibentuk $\hat{x_i} = \dfrac{x_i}{\|x_i\|}$, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Dengan $\eta > 0$ di atas, karena $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ basis ortonormal, diperoleh $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ rapat di $\mathcal{H}$. Oleh karena itu, terdapat e_k sehingga $\|e_k - \hat{x_i}\| < \dfrac{\eta}{4}$. Selanjutnya, untuk setiap $B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ berlaku

$$\begin{aligned}\|(A-B)(\hat{x_i}) - (A-B)(e_k)\| &= \|(A-B)(\hat{x_i} - e_k)\| \leq \|A-B\|\|\hat{x_i} - e_k\| \\ &\leq (\|A\| + \|B\|)\|\hat{x_i} - e_k\| < 2\|\hat{x_i} - e_k\| = \tfrac{\eta}{2}.\end{aligned}$$

Diperoleh $|\|(A-B)(e_k)\| - \|(A-B)(\hat{x_i})\|| \leq \|(A-B)(e_k) - (A-B)(\hat{x_i})\| < \frac{\eta}{2}$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $\mathrm{N} = m+1 \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Lemma 3.4 terdapat bola terbuka $\mathcal{O}_k \in \tau_{d_s}$ sehingga $B \in \mathcal{O}_k$ dan jika $k < \mathrm{N}$ berakibat $\|(A-B)(e_k)\| < \dfrac{\eta}{2}$. Dengan demikian, untuk setiap $B \in \mathcal{O}_k \in \tau_{d_s}$ dengan $k < \mathrm{N}$ berlaku $\|(A-B)(\hat{x_i})\| < \eta$, diperoleh $\|(A-B)(x_i)\| < \eta\|x_i\|$. Selanjutnya, dipilih $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_i\|}$, diperoleh $\mathcal{O}_k$ sehingga $B \in \mathcal{O}_k$ yang berakibat $\|(A-B)(x_i)\| < \varepsilon$. Karena berlaku untuk $k < \mathrm{N} = m+1$, diperoleh $\|(A-B)(x_i)\| < \varepsilon$, untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, m$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathcal{O}_k$. Akibatnya, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \varepsilon)$ merupakan anggota basis untuk topologi kuat τ_s. Diperoleh

$$\tau_{d_s} \subseteq \tau_s. \tag{5}$$

Sebaliknya, akan ditunjukkan $\tau_{d_s} \supseteq \tau_s$. Jika $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, dipilih N sehingga

$$\sum_{i=\mathrm{N}}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil sebarang $B \in \mathcal{O}_{\mathrm{N}}\left(A, \overline{e}, \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{N}}\right)$. Hal ini berarti, jika $i < \mathrm{N}$ maka $\|A(e_i) - B(e_i)\| < \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{N}}$. Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| + \sum_{i=\mathrm{N}}^{\infty} 2^{-i}\|A(e_i) - B(e_i)\| \\ &< \mathrm{N}\frac{\varepsilon}{2\mathrm{N}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $d_s(A, B) < \varepsilon$ sehingga $B \in \mathcal{O}(A, \varepsilon)$. Akibatnya, diperoleh

$$\tau_s \subseteq \tau_{d_s}. \tag{6}$$

Berdasarkan (5) dan (6), diperoleh $\tau_s = \tau_{d_s}$. ■

Karena ruang topologis $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dengan metrik d_s merupakan ruang metrik lengkap yang separabel dengan d_s membangkitkan topologi pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, maka diperoleh koleksi semua operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ merupakan ruang topologis yang termetrik lengkap *completely metrizable* pada topologi operator kuat.

3.2. Topologi lemah pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$

Definisi konvergen lemah disampaikan pada Definisi 3.6 sebagai berikut.

Definisi 3.6 *Diberikan $\mathcal{X}$. Barisan $\{x_n\} \subseteq \mathcal{X}$ dikatakan konvergen lemah ke x, ditulis $x_n \underset{\rightarrow}{w} x$ atau $x = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, jika $\{f(x_n)\}$ konvergen di $\mathcal{C}$ ke $f(x)$ untuk setiap $f \in \mathcal{X}^*$. Yaitu untuk setiap $f \in \mathcal{X}^*$, berlaku $\|f(x_n) - f(x)\| \to 0,$ untuk $n \to \infty$.*

Definisi 3.7 *Diberikan $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ ruang bernorma, dan fungsi T_n, T merupakan fungsi yang memetakan $\mathcal{X}$ ke $\mathcal{Y}$. Barisan $\{T_n\}$ dikatakan konvergen lemah ke T, ditulis $T_n \underset{\rightarrow}{w} T$ atau $T = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, jika $\{T_n(x)\}$ konvergen lemah di $\mathcal{Y}$ untuk setiap $x \in \mathcal{X}$. Equivalen dengan mengatakan bahwa jika $\{f(T_n(x))\}$ konvergen di $\mathcal{C}$ ke $f(T(x))$ untuk setiap $f \in \mathcal{Y}^*$ dan setiap $x \in \mathcal{X}$. Yaitu untuk setiap $x \in \mathcal{X}$, untuk setiap $f \in \mathcal{Y}^*$ berlaku $\|f(T_n(x)) - f(T(x))\| \to 0,$ untuk $n \to \infty$.*

Berdasarkan Teorema Representasi Riesz-Frechet, dalam hal $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert dapat diperoleh teorema berikut ini

Teorema 3.8 *Diberikan $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert, barisan $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x jika dan hanya jika barisan $\{\langle x_n, y\rangle\}$ konvergen ke $\langle x, y\rangle$ untuk setiap $y \in \mathcal{H}$.*

lebih lanjut, konvergen lemah pada pemetaan linear kontinu di ruang Hilbert diperoleh dari teorema berikut ini

Teorema 3.9 *Diberikan $\mathcal{X}$ ruang bernorma dan $\mathcal{H}$ merupakan ruang Hilbert, T_n, T merupakan pemetaan linear kontinu $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{H})$. Barisan $\{T_n\}$ konvergen lemah ke T jika dan hanya jika barisan $\{\langle T_n(x), y\rangle\}$ konvergen ke $\langle T(x), y\rangle$ untuk setiap pasang $x \in H$ $y \in \mathcal{H}$.*

Selanjutnya, Teorema berikut ini menunjukkan bahwa koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ merupakan ruang topologis

Lemma 3.10 *Untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ dibentuk*

$$d_w(A,B) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\|, \tag{7}$$

dengan $\{e_i\}$, $\{e_j\}$ basis ortonormal $\mathcal{H}$. Metrik d_w merupakan metrik pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dan d_w membangkitkan suatu topologi pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ yang dinotasikan dengan τ_{d_w}. Lebih lanjut $(\mathcal{C}_t(\mathcal{H}), d_w)$ merupakan ruang metrik lengkap yang separabel.

Bukti. Diambil sebarang $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{L}_c(H)$ sehingga $A_1 = A_2$ dan $B_1 = B_2$. Hal ini berarti untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku $A_1(x) = A_2(x)$ dan $B_1(x) = B_2(x)$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} d_w(A_1, B_1) &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A_1(e_i), e_j\rangle - \langle B_1(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A_2(e_i), e_j\rangle - \langle B_2(e_i), e_j\rangle \ \Big\| = d_w(A_2, B_2). \end{aligned}$$

Jadi, d_w fungsi. Untuk setiap $A, B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ memenuhi beberapa sifat berikut.

1. $d_w(A,B) = \displaystyle\sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \geq 0$
   dan
   $$\begin{aligned} d_w(A,B) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle \ \Big\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, i,j \in \mathbb{N}, 2^{-i-j} \, \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle A(e_i), e_j\rangle = \langle B(e_i), e_j\rangle \\ &\Leftrightarrow A(e_i) = B(e_i) \Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} d_w(A,B) &= \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \\ &= \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle B(e_i), e_j\rangle - \langle A(e_i), e_j\rangle \ \Big\| = d_w(B,A). \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} d_w(A,C) &= \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A(e_i), e_j\rangle - \langle C(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \\ &= \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \\ &\quad + \sum_{i=1,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \Big\| \ \langle B(e_i), e_j\rangle - \langle C(e_i), e_j\rangle \ \Big\| \\ &\leq d_w(A,B) + d_w(B,C). \end{aligned}$$

Diperoleh d_w metrik pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Lebih lanjut, dibentuk

$$\mathcal{B}(A,r) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) \, : \, d_w(A,B) < r\}.$$

Akan ditunjukkan koleksi $\{\mathcal{B}(A,r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ merupakan basis untuk topologi τ_{d_w} pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

(1). Untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ terdapat $\mathcal{B}(A,r) \in \{\mathcal{B}(A,r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ sehingga $A \in \mathcal{B}(A,r)$.

(2). Jika $C \in \mathcal{B}(A,r_1) \cap \mathcal{B}(B,r_2)$ dengan $\mathcal{B}(A,r_1), \mathcal{B}(B,r_2) \in \{\mathcal{B}(A,r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$, maka terdapat $r_3 = \frac{1}{2}\min\{r_1 - d_s(A,C), r_2 - d_s(B,C)\}$ sehingga $C \in \mathcal{B}(C,r_3) \subseteq \mathcal{B}(A,r_1) \cap \mathcal{B}(B,r_2)$.

Diperoleh koleksi $\{\mathcal{B}(A,r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ merupakan basis untuk topologi τ_{d_w} pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Akibatnya, metrik d_w membangkitkan suatu topologi pada $\mathcal{C}_t(H)$, dinotasikan dengan τ_{d_w}.

Diperhatikan bahwa $\mathcal{H}$ ruang Hilbert separabel berdimensi tak hingga dengan $\{e_i\} \subseteq \mathcal{H}$ merupakan basis ortonormal $\mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa himpunan

$$\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N} \ni A(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j,\ n \in \mathbb{N}, \\ \alpha_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle \in \mathbb{C} \ni Re(\alpha_{ij}), Im(\alpha_{ij}) \in \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

dengan metrik lemah merupakan himpunan bagian yang rapat dan terhitung di $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Diambil sebarang $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Hal ini berarti, $A(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Dengan demikian diperoleh,

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j.$$

Didefinisikan $A_n : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sedemikian hingga $A_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle A(x), e_j \rangle e_j$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. Diberikan $x, y \in \mathcal{H}$ dengan $x = y$, diperoleh

$$A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle A(x), e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle A(y), e_j \rangle e_j = A_n(y).$$

Jadi A_n fungsi. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in \mathcal{H}$, berlaku

$$\begin{aligned} \|A_n(x)\|^2 &= \left\| A_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle A_n(e_i) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \sum_{j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \| \langle x, e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle e_j \|^2 \leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

Diperoleh A_n kontraksi. Lebih lanjut, dengan $\alpha_{ij} = \langle A(e_i), e_j \rangle$, bilangan kompleks yang bagian real dan imajinernya rasional diperoleh $A_n \in \mathcal{F}$. Karena $d_s(A, A_n) < \varepsilon$, maka untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, dan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\|A_k(e_i) - A(e_i)\| < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ berlaku $\|\langle A(e_i), e_j \rangle - \langle A_n(e_i), e_j \rangle\| < \|\langle A(e_i) - A_n(e_i), e_j \rangle\| < \|A(e_i) - A_n(e_i)\| < \varepsilon$. Jadi, untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ terdapat $A_n \in \mathcal{F}$ sehingga $A_n \to A$ untuk $n \to \infty$. Akibatnya $\mathcal{F}$ merupakan himpunan bagian terhitung yang rapat dari $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ sehingga $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dengan metrik d_w merupakan ruang metrik separabel. Selanjutnya, akan dibuktikan lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_k\} \subseteq \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Diambil sebarang $N \in \mathbb{N}$ dan $\varepsilon > 0$, karena $\{A_k\}$ barisan Cauchy maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k, l \geq n_0$ berlaku

$$d_w(A_k, A_l) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Dengan demikian $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A_k(e_i), e_j\rangle - \langle A_l(e_i), e_j\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2^N}$, sehingga untuk suatu $j \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} \|\langle A_k(e_N), e_j\rangle - \langle A_l(e_N), e_j\rangle\| &\leq 2^N \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A_k(e_i), e_j\rangle - \langle A_l(e_i), e_j\rangle\| \right) \\ &< 2^N \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, untuk suatu $j \in \mathbb{N}$, berlaku $\{A_k(e_i)\}$ barisan Cauchy di $\mathcal{H}$, oleh karena itu untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $\{A_k(e_i)\}$ barisan Cauchy di $\mathcal{H}$. Karena $\mathcal{H}$ lengkap, diperoleh $\{A_k(e_i)\}$ konvergen ke suatu $y_i \in \mathcal{H}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$ dan untuk $k \to \infty$ berlaku $A_k(e_i) \to y_i$, diperoleh $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_k(e_i) \to \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_i$. Akibatnya, dapat didefinisikan fungsi $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sehingga

$$A(x) = \lim_{l \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_l(e_i),$$

dengan $x = \sum\limits_{ij=1}^{\infty} \alpha_{ij} e_i$. Operator A kontraksi sebab untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\begin{aligned} \|A(x)\|^2 &= \left\| \lim_{l \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_l(e_i) \right\|^2 = \lim_{l \to \infty} \left\| \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} A_l(e_i) \right\|^2 \\ &\leq \lim_{l \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \|A_l(e_i)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \lim_{l \to \infty} \|A_l(e_i)\|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \lim_{l \to \infty} \|e_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle A_k(e_i), e_j\rangle\| \leq \|A(e_i) - A_k(e_i)\| = \left\| \lim_{l \to \infty} A_l(e_i) - A_k(e_i) \right\| = \lim_{l \to \infty} \|A_l(e_i) - A_k(e_i)\| < \varepsilon.$$

Akibatnya, $d_w(A, A_k) = \sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle A_k(e_i), e_j\rangle\| < \sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \varepsilon = \varepsilon$. Diperoleh $\{A_k\}$ konvergen ke $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Jadi $(\mathcal{C}_t(\mathcal{H}), d_w)$ merupakan ruang metrik separabel lengkap.

■

Lemma 3.11 *Koleksi dari semua himpunan*

$$\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \|\langle A(x_i), y_j\rangle - \langle B(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n\}$$

dengan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$*,* $\overline{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \overline{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subseteq \mathcal{H}$*, dan* $\varepsilon > 0$ *merupakan basis untuk topologi lemah pada* $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$*.*

Bukti. Himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ merupakan anggota basis topologi pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, sebab

1. Untuk setiap $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, $\varepsilon > 0$ dan $x, y \in \mathcal{H}$, $\|\langle A(x), y\rangle - \langle A(x), y\rangle\| = 0 < \varepsilon$. Jadi terdapat $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^n$, dan $\varepsilon > 0$ sehingga $A \in \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

2. Jika himpunan $B \in \mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{u}, \overline{v}, \delta)$, dengan himpunan $\mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ dan $\mathcal{O}_m(A_2, \overline{u}, \overline{v}, \delta) \in \{\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), \overline{x} = \{x_i\}_{i=1}^n, \overline{y} = \{y_j\}_{j=1}^n, \varepsilon > 0\}$, maka untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$ berlaku $\|\langle A_1(x_i), y_j\rangle, -\langle B(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon$ dan untuk setiap $k, l = 1, 2, \cdots, m$ berlaku $\|\langle A_2(u_k), v_l\rangle - \langle B(u_k), v_l\rangle\| < \delta$. Dapat dipilih $\{z_p\}_{p=1}^s$ yang termuat di $\{x_i\}_{i=1}^n \cap \{u_k\}_{k=1}^m$, dan $\{w_q\}_{q=1}^s \subseteq \{y_j\}_{j=1}^n \cap \{v_l\}_{l=1}^m$, dengan $s \leq n$ dan $s \leq m$. Dengan demikian, $z_p \in \{x_i\}_{i=1}^n$ dan $z_p \in \{u_k\}_{k=1}^m$, $w_q \in \{y_j\}_{j=1}^n$ dan $w_q \in \{v_l\}_{l=1}^m$, untuk setiap $p, q = 1, 2, \cdots, s$. Selanjutnya, dapat dipilih $\delta_0 > 0$ dengan $\delta_0 = \min\{\varepsilon - \|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\|, \delta - \|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\|\}$. Diperoleh $\mathcal{O}_s(B, \overline{z}, \overline{w}, \delta_0) \in \{\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), \overline{x} = \{x_i\}_{i=1}^n, \overline{y} = \{y_j\}_{j=1}^n, \varepsilon > 0\}$.
   Diperhatikan, jika $C \in \mathcal{O}_s(B, \overline{z}, \overline{w}, \delta_0)$, hal ini berarti $\|\langle B(z_p), w_q\rangle - \langle C(z_p), w_q\rangle\| < \delta_0$ dengan $p, q = 1, 2, \cdots, s$. Karena untuk setiap $p, q = 1, 2, \cdots, s$ berlaku $z_p \in \{x_i\}_{i=1}^n$, $z_p \in \{u_k\}_{k=1}^m$ dan $w_q \in \{y_j\}_{j=1}^n$, $w_q \in \{v_l\}_{l=1}^m$ maka $\|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| < \varepsilon$ dan $\|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| < \delta$.
   Dengan demikian, diperoleh
   $$\begin{aligned}&\|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle C(z_p), w_q\rangle\| \\ &\quad\leq \|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| + \|\langle B(z_p), w_q\rangle - \langle C(z_p), w_q\rangle\| \\ &\quad< \|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| + (\varepsilon - \|\langle A_1(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\|) = \varepsilon,\end{aligned}$$
   dan
   $$\begin{aligned}&\|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle C(z_p), w_q\rangle\| \\ &\quad\leq \|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| + \|\langle B(z_p), w_q\rangle - \langle C(z_p), w_q\rangle\| \\ &\quad< \|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\| + (\delta - \|\langle A_2(z_p), w_q\rangle - \langle B(z_p), w_q\rangle\|) = \delta.\end{aligned}$$
   Sehingga $C \in \mathcal{O}_s(A_1, \overline{z}, \overline{w}, \varepsilon)$ dan $C \in \mathcal{O}_s(A_2, \overline{z}, \overline{w}, \delta)$. Akibatnya diperoleh C anggota $\mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{u}, \overline{v}, \delta)$. Jadi, terdapat B anggota $\mathcal{O}_s(B, \overline{z}, \overline{w}, \delta_0)$ yang termuat di $\mathcal{O}_n(A_1, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_m(A_2, \overline{u}, \overline{v}, \delta)$.

Katakan $\tau_{\mathcal{O}}$ menyatakan topologi yang dibangun oleh $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ dan τ_w menyatakan topologi lemah. Akan ditunjukkan bahwa $\tau_w = \tau_{\mathcal{O}}$. Diambil sebarang himpunan terbuka $\mathcal{O} \in \tau_{\mathcal{O}}$. Dengan demikian, terdapat koleksi himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$. Untuk setiap $B \in \mathcal{O}$ terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $B \in \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$. Hal ini berarti, untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, m$, berlaku $\|\langle A(x_i), y_j\rangle - \langle B(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon$. Akibatnya diperoleh $\langle B(x_i), y_j\rangle$ anggota $\mathcal{B}(\langle A(x_i), y_j\rangle, \varepsilon)$. Oleh karena itu, jika $U_{ij} = \mathcal{B}(\langle A(x_i), y_j\rangle, \varepsilon)$, maka untuk setiap indeks $i, j = 1, 2, \cdots, m$ diperoleh $\langle B(x_i), y_j\rangle \in U_{ij}$. Akibatnya, B anggota $\mathcal{B}_m(A(x), U)$ sehingga $B \in \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$. Jadi,

$$\tau_{\mathcal{O}} \subseteq \tau_w. \tag{8}$$

Sebaliknya, diambil sebarang himpunan terbuka $\mathcal{O} \in \tau_w$. Hal ini berarti, terdapat koleksi himpunan $\mathcal{B}_n(A(x), U)$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$. Untuk setiap $B \in \mathcal{O}$ berlaku $B \in \bigcup_n \mathcal{B}_n(A(x), U)$ sehingga terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $B \in \mathcal{B}_m(A(x), U)$. Hal ini berarti, $\langle B(x_i), y_j\rangle \in U_{ij}$ dengan $i, j = 1, 2, \cdots, m$. Karena U_{ij} terbuka, terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $\mathcal{B}(\langle B(x_i), y_j\rangle, \varepsilon) \subseteq U_{ij}$. Jika didefinisikan $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sehingga

$$A(x) = \begin{cases} B(x), & \text{untuk } x \in \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}; \\ \hat{0}, & \text{untuk } x \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}. \end{cases}$$

Jelas $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ dan $\|\langle A(x_i), y_j\rangle - \langle B(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon$ dengan $i, j = 1, 2, \cdots, m$. maka diperoleh $\langle B(x_i), y_j\rangle \in \mathcal{B}(\langle A(x_i), y_j\rangle, \varepsilon)$, sehingga $B \in \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$. Lebih lanjut, $B \in \bigcup_n \mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$. Jadi

$$\tau_w \subseteq \tau_{\mathcal{O}}. \tag{9}$$

Berdasarkan (8) dan (9) diperoleh $\tau_w = \tau_{\mathcal{O}}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa topologi yang dibangun oleh basis $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ merupakan topologi lemah. ■

Lemma 3.12 *Diketahui* $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. *Jika diberikan* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *dan* $\varepsilon > 0$ *sebarang, terdapat bola terbuka* $\mathcal{O} \in \tau_{d_w}$ *sehingga* $B \in \mathcal{O}$ *dan jika* $i + j < \mathrm{N}$ *berakibat* $\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \varepsilon$.

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Jika η sebarang bilangan real positif, maka $d_w(A, B) < \eta$ berakibat $\sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} 2^{-i-j}\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j}\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \eta$, sehingga diperoleh $\sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} 2^{\mathrm{N}-i-j}\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < 2^{\mathrm{N}}\eta$. Jika $i + j < \mathrm{N}$, berlaku $\mathrm{N} - i - j > 0$. Akibatnya, jika dipilih $\eta = \frac{\varepsilon}{2^{\mathrm{N}}}$, diperoleh

$$\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| \leq \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} 2^{\mathrm{N}-i-j}\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < 2^{\mathrm{N}}\eta = \varepsilon.$$

Dibentuk $\mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} 2^{-i-j}\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \eta\}$. Diperoleh $\mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta) \in \{B(A, r) : A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}), r > 0\}$ dan jika terdapat bola terbuka $\mathcal{O} = \bigcup_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta)$, maka $\mathcal{O} \in \tau_{d_w}$. Karena $B \in \mathcal{B}(A, \mathrm{N}, \eta)$, untuk suatu N, diperoleh $B \in \mathcal{O}$ dan jika $i + j < \mathrm{N}$ berakibat $\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \varepsilon$. ■

Teorema 3.13 *Metrik d_w pada persamaan (7) membangkitkan topologi lemah pada $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.*

Bukti. Diberikan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, telah dibuktikan bahwa $\mathcal{O}(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : d_w(A, B) < \varepsilon\}$ adalah anggota basis untuk topologi τ_{d_w}. Berdasarkan Lemma 3.11, diketahui bahwa himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H}) : \|\langle A(x_i), y_j\rangle - \langle B(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon, i, j = 1, 2, \cdots, n\}$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\{x_i\}_{i=1}^n$ $\{y_j\}_{j=1}^n$ sebarang vektor berhingga adalah anggota basis untuk τ_w.

Akan ditunjukkan $\tau_{d_w} \subseteq \tau_w$. Diberikan $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$. Diambil sebarang $\mathcal{O} \in \tau_{d_w}$. Untuk setiap $B \in \mathcal{O}$ berlaku $B \in \bigcup_{r>0} \mathcal{O}(A, r)$, yang artinya terdapat $\eta > 0$ sehingga $B \in \mathcal{O}(A, \eta)$. Diberikan sebarang vektor berhingga $\{x_i\}_{i=1}^m$ $\{y_j\}_{j=1}^m$. Dibentuk $\hat{x_i} = \dfrac{x_i}{\|x_i\|}$, $\hat{y_j} = \dfrac{y_i}{\|y_i\|}$, Untuk $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Dengan $\eta > 0$ di atas, karena $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ basis ortonormal, diperoleh $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ rapat di $\mathcal{H}$. Oleh karena itu, terdapat e_k dan e_l sehingga $\|e_k - \hat{x_i}\| < \dfrac{\eta}{2}$ dan $\|e_l - \hat{y_j}\| < \dfrac{\eta}{2}$.. Selanjutnya, untuk setiap $B \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\langle(A-B)(\hat{x_i}), y_j\rangle - \langle(A-B)(e_k), e_l\rangle\| &= \|\langle(A-B)(\hat{x_i} - e_k), \hat{y_j} - e_l\| \\
&\leq \|A - B(\hat{x_i} - e_k)\|\|\hat{y_j} - e_l\| \\
&\leq \|A - B\|\|\hat{x_i} - e_k\|\hat{y_j} - e_l\| \\
&\leq (\|A\| + \|B\|)\|\hat{x_i} - e_k\|\hat{y_j} - e_l\| \\
&< 2\|\hat{x_i} - e_k\|\hat{y_j} - e_l\| = \tfrac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$|\|\langle(A-B)(e_k), e_l\rangle\| - \|\langle(A-B)(\hat{x_i}), y_j\rangle\|| \leq \|\langle(A-B)(\hat{x_i}), y_j\rangle - \langle(A-B)(e_k), e_l\rangle\| < \tfrac{\eta}{2}.$$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $\mathrm{N} = m + 1 \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Lemma 3.12 terdapat bola terbuka $\mathcal{O}_{k,l} \in \tau_{d_w}$ sehingga $B \in \mathcal{O}_{k,l}$ dan jika $k + l < \mathrm{N}$ berakibat $\|\langle(A-B)(e_k), e_l\rangle\| < \dfrac{\eta}{2}$. Dengan demikian, untuk setiap $B \in \mathcal{O}_{k,l} \in \tau_{d_w}$ dengan $k + l < \mathrm{N}$ berlaku $\|\langle(A-B)(\hat{x_i}), y_j\rangle\| < \eta$, diperoleh $\|\langle(A-B)(x_i), y_j\rangle\| < \eta\|x_i\|\|y_j\|$. Selanjutnya, dipilih $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_i\|\|y_j\|}$, diperoleh $\mathcal{O}_{k,l}$ sehingga $B \in \mathcal{O}_{k,l}$ yang berakibat $\|\langle(A-B)(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon$. Karena untuk $k < \mathrm{N} = m + 1$, berlaku $\|\langle(A-B)(x_i), y_j\rangle\| < \varepsilon$, untuk setiap $k, l = 1, 2, \cdots, m$ sehingga $\mathcal{O} = \bigcap_{k,l=1}^{m} \mathcal{O}_{k,l}$.

Akibatnya, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_m(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ merupakan anggota basis untuk topologi lemah τ_w. Diperoleh

$$\tau_{d_w} \subseteq \tau_w. \tag{10}$$

Sebaliknya, akan ditunjukkan $\tau_{d_w} \supseteq \tau_w$. Jika $A \in \mathcal{C}_t(\mathcal{H})$, dipilih N sehingga

$$\sum_{i,j=\mathrm{N}}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil sebarang $B \in \mathcal{O}_{\mathrm{N}}\left(A, \overline{e}, \frac{\varepsilon}{2\mathrm{N}}\right)$, dengan $\overline{e_N} = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$.
Hal ini berarti, jika $i + j < \mathrm{N}$ berakibat $\|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{N}}$. Jadi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| &= \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}-1} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| \\
&\quad + \sum_{i,j=\mathrm{N}}^{\infty} 2^{-i-j} \|\langle A(e_i), e_j\rangle - \langle B(e_i), e_j\rangle\| \\
&< \mathrm{N}\frac{\varepsilon}{2\mathrm{N}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $d_w(A, B) < \varepsilon$ sehingga $B \in \mathcal{O}(A, \varepsilon)$. Akibatnya, diperoleh

$$\tau_w \subseteq \tau_{d_w}. \tag{11}$$

Berdasarkan (10) dan (11), diperoleh $\tau_w = \tau_{d_w}$. ■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, berikut ini diberikan beberapa kesimpulan tentang topologi operator kuat dan topologi operator lemah pada koleksi semua operator kontraksi di ruang Hilbert.

1. Metrik d_s adalah metrik yang membangun suatu topologi pada koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

2. Koleksi dari semua himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \varepsilon)$ merupakan basis yang membangun topologi kuat pada koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

3. Teorema 3.5menunjukkan bahwa koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ merupakan ruang operator topologis kuat yang separabel termetrik lengkap yaitu menunjukkan bahwa terdapat metrik separabel lengkap yang membangun topologi kuat.

4. Metrik d_w adalah metrik yang membangun suatu topologi pada koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

5. Koleksi dari semua himpunan $\mathcal{O}_n(A, \overline{x}, \overline{y}, \varepsilon)$ merupakan basis yang membangun topologi lemah pada koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$.

6. Teorema 3.13menunjukkan bahwa koleksi operator kontraksi $\mathcal{C}_t(\mathcal{H})$ merupakan ruang operator topologis lemah yang separabel termetrik lengkap yaitu terdapat metrik separabel lengkap yang membangun topologi lemah.

DAFTAR PUSTAKA

Rusdiana, Yulianti, dan Indrati, C.H. Rini, 2014. *Sifat $\mathcal{S}-$Tipikal Operator pada Ruang Hilbert*, Tesis, Universitas Gadjah Mada, yogyakarta.

Berberian, S.K.,1961. *Introduction to Hilbert Space*, Oxford University press, Inc. New York.

Dugundji, J., 1966. *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Atlantic Avenue, Boston.

Eisner, T. and Mátrai, T., (2012). On Typical Properties of Hilbert Space Operators, *Israel Journal of Mathematics*, hal.11 - 21.

Chevreau, Bernard and Pearcy, Carl, 1986. On the Structure of Contraction Operators, *Journal of Functional Analysis*.

Hunter, J.K. and Nachtergaele, B., 1975. *Applied Analysis*, University of California, California.

Kadison, Richard V., 1925. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Birkhäuser, Boston.

Kechris, A.S., 1994. *Classical descriptive set theory* , California Institute of Technology. Pasadena.

Kelley, John.L 1988. *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics, University of California, Berkeley, California.

Kubrusly, C.S., 2010. *Elements Of Operator Theory*, Birkhäuser, Boston.

Munkres, J.R., 2000. *Topology*, Pearson Education International, Prentice Hall, Inc. United states of America.

Nagy, B.S. and Ciprian. F, 1970. *Harmonic analysis of operator on Hilbert space*, North Holland. Amsterdam, Budapest.

Rosenblum, Marvin and Rovnyak, James, (1988). *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York.

Royden, H.L., 1988. *Real Analysis*, Collier Macmillan canada, Inc. 866 Third avenue, New York, New York.