

## STUDI METODA PENENTUAN LUASAN DI BAWAH KURVA DARI PARAMETER LISTRIK VS WAKTU UNTUK ANALISA KELISTRIKAN

### *STUDY OF DETERMINING THE AREA UNDER THE CURVE OF ELECTRICAL PARAMETERS VS TIME FOR ELECTRICAL ANALYSIS*

**Hedy Aditya Baskhara, Ojak Abdul Rozak\***

Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Pamulang, Jl. Raya Puspitek, Buaran,  
Pamulang, Kota Tangerang Selatan, Banten 15310, Indonesia  
[dosen01314@unpam.ac.id](mailto:dosen01314@unpam.ac.id)

#### **ABSTRACT**

*If the curve obtained gives an indeterminate shape, due to changes in the measurement value that changes every time, a method is needed to be able to determine the area under the curve by approximating methods. The methods used to determine the area under the curve are by weighing the area the graph paper, mechanical measurement methods, graphics analysis methods, first order polynomial methods and numerical analysis methods. Calculations with these rules, can be made in tabular form, or in the algorithm is described in computer programming. A method that is easy to implement and quite accurate is Simpson's rule.*

**Keywords:** *weighing, mechanical, graphics, polynomial, simpson.*

#### **ABSTRAK**

Jika kurva yang diperoleh memberikan bentuk yang tak tentu, oleh sebab adanya perubahan nilai pengukuran yang berubah tiap waktu, maka diperlukan metoda untuk dapat menentukan luasan di bawah kurva dengan cara-cara pendekatan. Metoda-metoda yang digunakan untuk menentukan luasan di bawah kurva yaitu dengan metoda penimbangan dari luasan kertas grafik, metoda pengukuran mekanis, metoda analisa grafik, metoda polinomial orde pertama, dan metoda analisa numerik. Perhitungan dengan aturan-aturan ini, dapat dibuat dalam bentuk tabel, atau algoritmanya diuraikan ke dalam pemrograman komputer. Metoda yang mudah dalam penerapan dan cukup akurat adalah aturan Simpson.

**Kata kunci:** *penimbangan, mekanis, grafik, polinomial, simpson.*

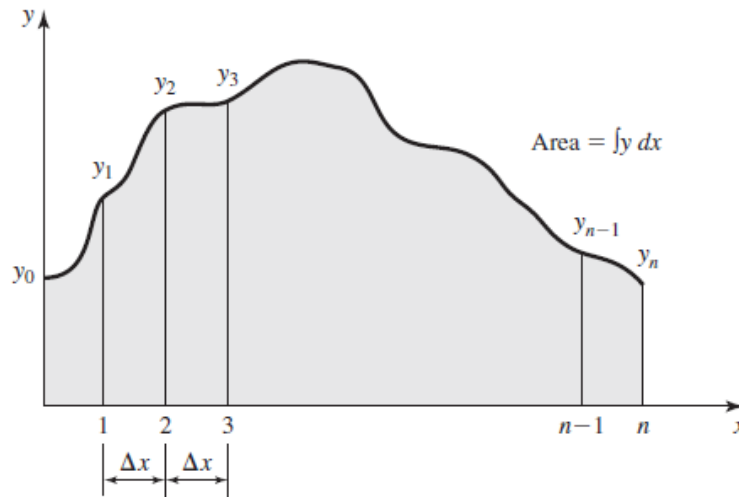
### **1. PENDAHULUAN**

Metoda perhitungan luasan di bawah kurva parameter listrik vs waktu perlu dikembangkan agar hasil perhitungan mempunyai nilai yang lebih baik dalam ketelitiannya. Penentuan luasan di bawah kurva dapat diperoleh dengan cara penimbangan, cara mekanis, analisa grafik, dan analisa numerik yaitu dengan perkiraan integrasi. Metoda yang ada dalam analisa numerik yaitu aturan persegi, aturan *midpoint*, aturan *trapezoidal*, aturan *simpson*, aturan *romberg*, aturan *newtoncotes* dan lainnya. Dalam tulisan ini dibahas metoda timbangan, pengukuran mekanis analisa grafik, dan analisa numerik. Metoda yang mudah dalam penerapan dan cukup akurat adalah aturan *trapezoidal* serta aturan *simpson*.

## 2. METODOLOGI

### 2.1. Penentuan Luasan di Bawah Kurva

Penentuan luasan di bawah kurva dapat diilustrasikan pada Gambar 1:



**Gambar 1.** Penentuan luasan di bawah kurva (R.A. Nakka, 2000).

Jenis metoda penentuan luasan di bawah kurva menurut C.A. Thompson (1992) dalam Bab 1.3.2 pada Tabel 1.1 *Common Numerical Integration Methods* terdiri dari: (1) *taylor series*; (2) *forward euler*; (3) *hamming midpoint*; (4) *backward euler*; (5) *trapezoidal*; (6) *parabolic*; (7) *simpson's rule*; (8) *corrected trapezoidal*; (9) *romberg integration*; (10) *gear's integration methods*; (11) *bode's integration methods*; (12) *gaussian quadrature*; (13) *milne's predictor corrector*; (14) *newton-cotes*; dan (15) *runge-kutta*.

Untuk menghitung luasan di bawah kurva pada tulisan ini, akan dibahas beberapa metoda perhitungan penentuan luasan di bawah kurva, seperti: (1) metoda penimbangan dari luasan kertas grafik hasil pengukuran; (2) metoda pengukuran mekanis; (3) metoda analisa grafik; (4) metoda polinomial orde pertama; dan (5) metoda analisa numeris yang meliputi: (a) aturan trapezoidal; (b) aturan simpson-1/3; dan (c) aturan simpson-3/8.

### 2.2. Metoda Penimbangan Dari Luasan Kertas Grafik Hasil Pengukuran

Metoda ini merupakan metoda sederhana yang menerapkan suatu hubungan persamaan keadaan antara bobot pada luasan di bawah kurva dan dalam hubungannya dengan berat pada segi 4 total, yang dapat diuraikan sebagai berikut {tanda (:) pada uraian berikut berarti sebanding}

$$faktor_{pembanding} = \frac{berat_{segi4}}{berat_{kurva}} : \frac{parameter\ total_{segi4}}{parameter\ total_{kurva}} \quad (1)$$

Faktor perbandingan yang dihasilkan memberikan faktor pengali pada perbandingan yang lain, dan parameter total yang dicari ditentukan dari perbandingan bobot kertas yang ditimbang.

### 2.3. Metoda Pengukuran Mekanis

Menurut J.P. Holman (2012), Peralatan integrator mekanis yang dapat digunakan untuk pengukuran luasan di bawah kurva adalah planimeter. Ada dua jenis planimeter yaitu planimeter polar dan planimeter roll, masing-masing ditunjukkan pada Gambar 2 *planimeter polar*, Gambar 3 Penggunaan *planimeter polar* dan Gambar 4 *planimeter roll*. Luasan kurva pada Gambar 2 dengan penelusuran lengan BT dan OB adalah:

$$dA = \frac{1}{2}L^2d\theta + LR \cos \beta d\theta + \frac{1}{2}R^2d\theta \quad (2)$$

dan jarak yang ditempuh penjejak:

$$ds = a. d\theta + R \cos \beta d\theta \quad (3)$$

Dengan mengintegrasikan Persamaan 2, maka diperoleh:

$$A = \frac{1}{2}L^2 \int d\theta + LR \int \cos \beta d\theta + \frac{1}{2}R^2d\theta \quad (4)$$

dan

$$s = a \int d\theta + \int R \cos \beta d\theta \quad (5)$$

Sehingga

$$\int R \cos \beta d\theta = s - a. d\theta$$

dan

$$A = \left(\frac{1}{2}L^2 - aL\right) \int d\theta + LS + \frac{1}{2}R^2d\theta \quad (6)$$

Formulasi umum untuk jenis planimeter polar yaitu:

\* Bila titik tetapnya (*pivot point*) berada di luar kurva:

$$Luas = L. s \quad (7)$$

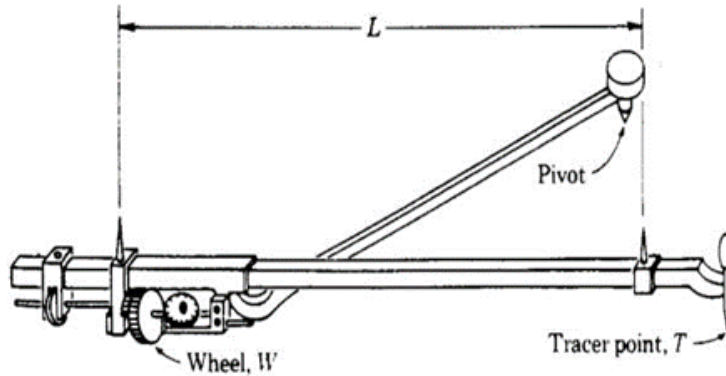
\* Bila titik tetapnya (*pivot point*) berada di dalam kurva:

$$Luas = L. s + (R^2 + L^2 - 2. a. L)\pi \quad (8)$$

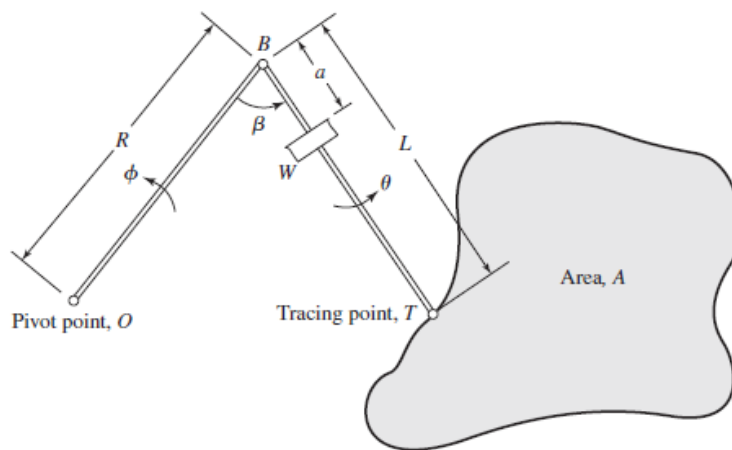
dengan

$$s = R \int \sin \varphi d\varphi \quad (8)$$

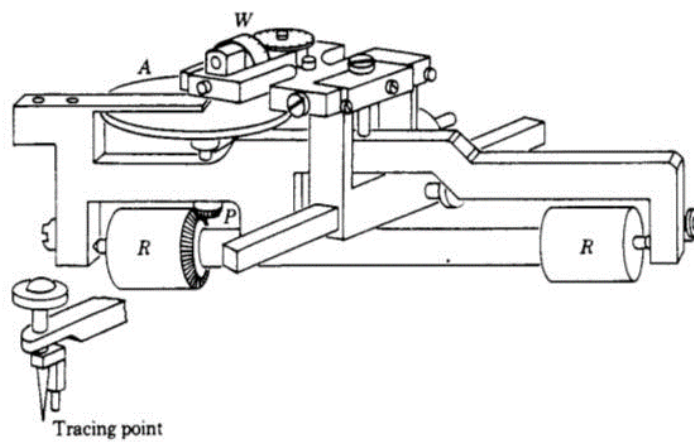
$L$  dan  $R$  = lengan penjejak dan lengan *pole*,  $a$  = jarak dari pertemuan  $L$  dan  $R$  dengan penghitung roda gigi mekanis dan  $\phi$  = sudut yang dibuat oleh lengan *pole* pada saat titik penjejak menelusuri kurva.



Gambar 2. *Planimeter polar.*



Gambar 3. Penggunaan *planimeter polar.*



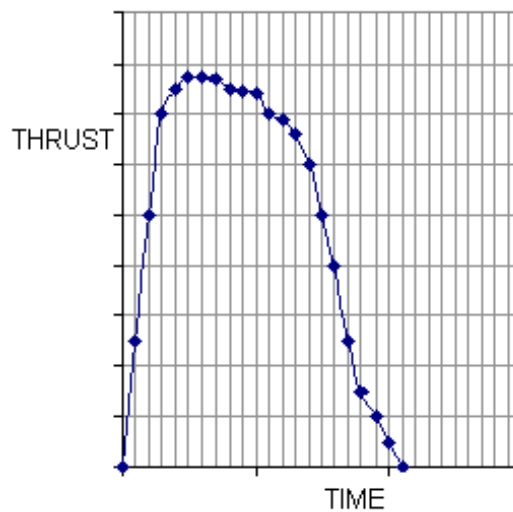
Gambar 4. *Planimeter roll.*

## 2.4. Metoda Analisa Grafik

Grafik yang dihasilkan dari pengukuran, dianalisis dengan menentukan lama waktu pada kurva dan menentukan garis rerata dari parameter listrik dimaksud. Nilai-nilai tersebut menghasilkan parameter total dengan mengalikannya.

## 2.5. Metoda Polinomial Orde Pertama

Menurut R.A. Nakka (2000) dan S.C. Chapra, R.P. Canale (2010), menggunakan pendekatan dalam menentukan luasan di bawah kurva, dengan penjumlahan luas potongan individual parameter gaya-dorong dan lebar waktu dari inkremen waktu yang sama.



**Gambar 5. Contoh kurva gaya-dorong vs waktu.**

Gambar 5 menunjukkan titik-titik data menggambarkan titik data terukur diperoleh dari pengujian motor. Dalam bentuk persamaan diberikan oleh:

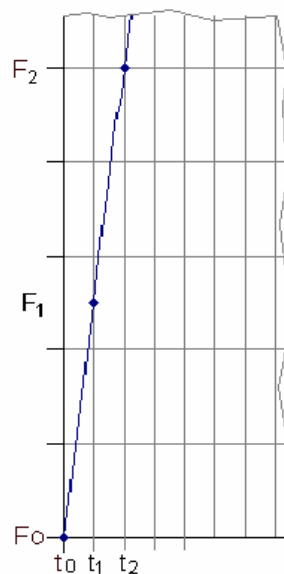
$$P_t = \frac{F_0 + F_1}{2} \cdot (t_1 - t_0) + \dots + P_t = \frac{F_{n-1} + F_n}{2} \cdot (t_n - t_{n-1}) \quad (9)$$

dengan:  $F_0$  = harga parameter inisial,  $F_n$  = harga parameter akhir, dan  $P_t$  = Parameter gaya-dorong total sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.

Jika  $(t_1 - t_0) = (t_2 - t_1) = (t_n - t_{n-1}) = \Delta t$ , yaitu kenaikan dalam waktu adalah sama, maka persamaan 9 dapat disederhanakan menjadi:

$$P_t = \Delta t \cdot (F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n) \quad (10)$$

Untuk menentukan parameter total adalah dengan menjumlahkan semua harga-harga parameter gaya-dorong terukur dan mengalikan hasilnya dengan  $\Delta t$ . Sebagai catatan bahwa semakin kecil  $\Delta t$ , maka hasil akhir semakin akurat.



**Gambar 6. Perbesaran sebagian grafik hubungan parameter gaya-dorong vs waktu.**

Untuk mendapatkan parameter gaya-dorong rerata dari runtun data hasil ukur parameter gaya-dorong, diperoleh dari hubungan berikut:

$$\bar{F} = E\{F\} = m_F = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n \quad (11)$$

dengan:  $\bar{F}$  = parameter gaya-dorong rerata (satuan),  $F$  = parameter gaya-dorong (satuan),  $E\{F\}$  = nilai terhadap dari parameter gaya dorong (*the expected value of thrust parameter*),  $m_F$  = mean atau *average* of  $F$ , dan  $N$  = jumlah cacahan data dari runtun data hasil ukur parameter gaya-dorong. Catatan bahwa  $E$  adalah operator matematik yang disebut ekspetasi, digunakan dalam probabiliti dan proses stokastik.

## 2.6. Metoda Analisa Numerik

Integrasi numerik digunakan dalam menentukan luasan di bawah kurva, yang ditulis sebagai integral tertentu yaitu:

$$Luas = A = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (12)$$

Dengan pendekatan dasar menggunakan prinsip penjumlahan

$$A = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

untuk pendekatan

$$A = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

### 2.7. Metoda Analisa Numerik (Aturan Trapezoidal)

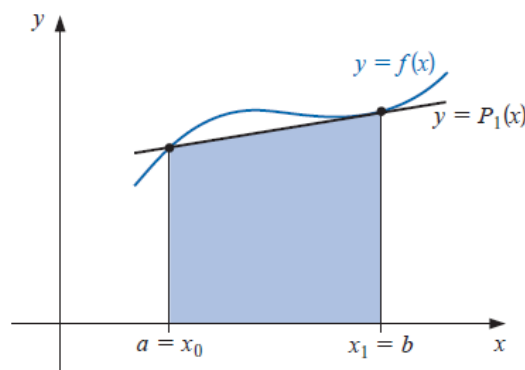
Konsep dasar pembentukan aturan ini didasarkan kepada luas dari sebuah trapezoidal dengan dua buah sisi yang sejajar. Luasnya ditentukan dari pertambahan jarak dua buah sisi sejajar dikalikan dengan jarak antara dua sisi sejajar tersebut, dan hasilnya dibagi dengan dua. Bila ada dua buah trapezoidal, maka dengan menjumlahkan akan didapat hasil yaitu :

$$Luas \approx \frac{1}{2} \cdot (h) \cdot (y_1 + 2y_2 + y_3) \tag{13}$$

Untuk banyak ordinat dari trapezoidal, maka dengan faktor pengali (1 2 1) sehingga akan diperoleh :

$$Luas = \int_a^b y \, dx \approx \frac{1}{2} \cdot (h) \cdot (y_1 + 2y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + y_n) \tag{14}$$

dengan:  $h$  = jarak antara ordinat (interval dari luasan).  $y_1$  = besar nilai ordinat  $y_1$  dan  $y_2$  = besar nilai ordinat  $y_2$ .

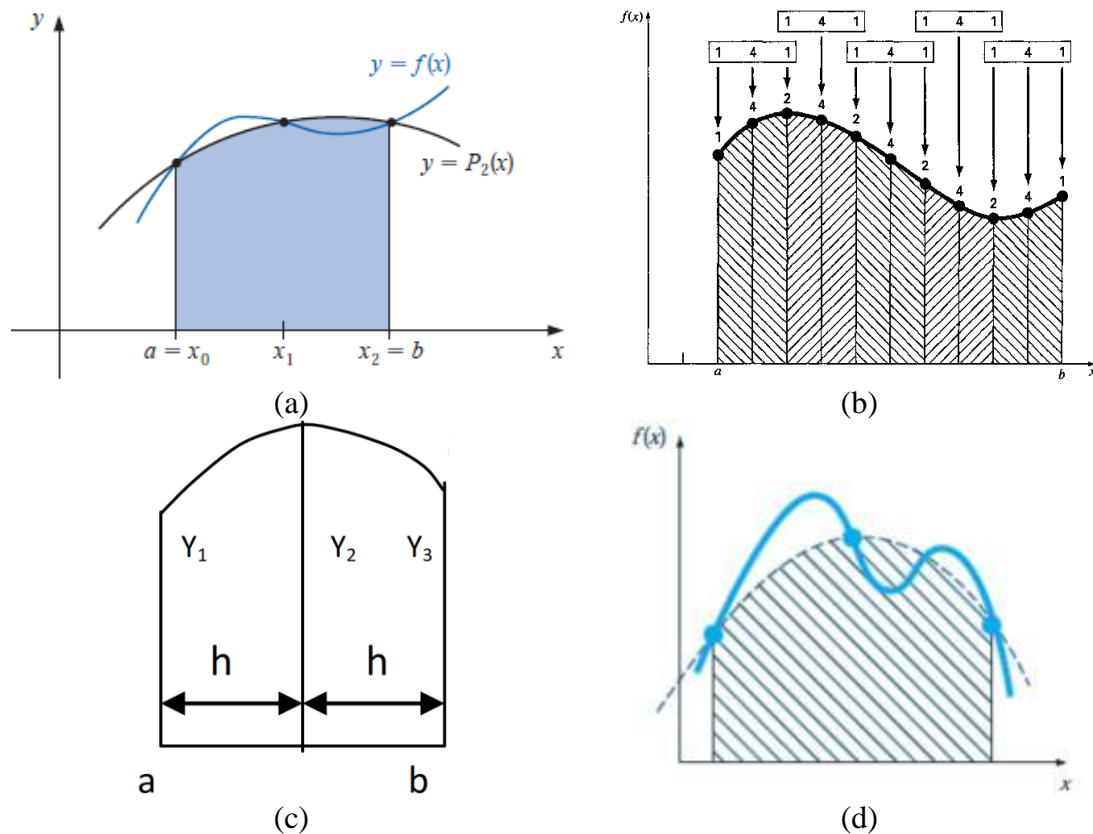


**Gambar 6. Penentuan luasan dibawah kurva menggunakan aturan trapezoidal.**

### 2.8. Metoda Analisa Numerik (Aturan Simpson 1/3)

Konsep dasar aturan Simpson-1/3 pada kurva yaitu dalam bentuk segmen-segmen atau ordinatordinat seperti terlihat pada Gambar 7, dan dengan pendekatan persamaan parabola orde 2, yang dihubungkan dengan 3 buah titik, yaitu :  $y = ax^2 + bx + c$ . Dengan mengintegrasikan dan menguraikannya, didapat aturan Simpson-1/3, yaitu:

$$Luas = A = \int_a^b y \, dx \approx \frac{1}{3} \cdot (h) \cdot (y_1 + 4y_2 + y_3) \tag{15}$$



**Gambar 7. Ordinat-ordinat dari aturan Simpson dengan 3 titik.**

Dalam penambahan ordinat  $y$  maka untuk kolom selanjutnya adalah dengan menempatkan faktor pengali Simpson, dan mengkombinasikannya, sehingga didapat faktor pengali Simpson, yaitu:  $(1\ 4\ 2\ 4\ 2\ \dots\ 2\ 4\ 1)$ . Dari hasil tersebut, maka dalam persamaan matematisnya adalah:

$$A = \int_a^b y \, dx \approx \frac{1}{3} \cdot (h) \cdot (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \quad (16)$$

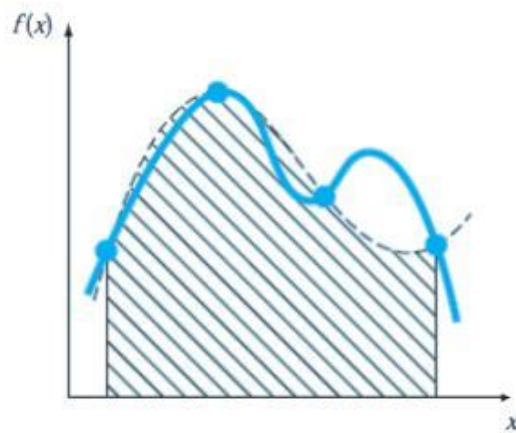
dengan  $y_n$  pada angka ganjil dan jumlah interval  $h =$  genap,  $h =$  jarak antara ordinat (interval dari luasan),  $y_1 =$  besar nilai ordinat  $y_1$ , dan  $y_n =$  besar nilai ordinat  $y_n$ .

### 2.9. Metoda Analisa Numerik (Aturan Simpson 3/8)

Cara mendapatkan aturan Simpson-3/8 adalah analogi dengan aturan Simpson-1/3, tetapi dengan pendekatan dari bentuk umum persamaan parabola orde-3, dan dihubungkan dengan 4 buah titik, yaitu:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Dengan integrasi dan penguraian lebih lanjut didapat:



$$A = \int_a^b y dx \approx \frac{3}{8} \cdot (h) \cdot (y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 3y_5 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (17)$$



**Gambar 8. Ordinat-ordinat dari aturan Simpson dengan 4 titik.**

### 3. PEMBAHASAN

#### 3.1. Metoda Penimbangan Dari Luasan Kertas Grafik Hasil Pengukuran

Pada sebuah kurva yang akan dicari bobotnya (pada Gambar 1), maka: (1) mencetak ulang grafik hasil pengukuran parameter listrik sebanyak n buah, yang masing-masing lembar hasil cetak ulang tersebut mempunyai bobot yang sama. Hal ini dimaksud agar mendapatkan hasil penimbangan dengan lebih seksama berdasarkan jumlah penimbangan; (2) memotong segi empat terluar dari grafik hasil pengukuran tersebut, dan diukur jarak masing-masing sisi dan dihitung luasnya (dalam  $\text{cm}^2$ ). Konversikan ke dalam besaran parameter total pada segi empat (satuan). Hasilnya dicatat dalam sebuah tabel, kemudian ditimbang bobotnya dengan sebuah alat timbangan yang mempunyai ketelitian dan akurasi baik. Langkah ini diulangi beberapa kali sehingga didapat rerata dari hasil pengukuran timbangan secara baik dan sesuai; dan (3) memotong besar kurva, kemudian ditimbang bobotnya. Langkah ini juga diulangi beberapa kali sesuai dengan jumlah pada penimbangan segi empat, dan ditentukan rerata hasilnya. Parameter total kurva yang dicari ditentukan dari perbandingan bobot kertas yang ditimbang tersebut.

#### 3.2. Metoda Pengukuran Mekanis Menggunakan Planimeter

Kertas grafik ditempatkan pada sebuah tempat yang rata dan dipegang ujung-ujungnya dengan erat pada tempat rata itu menggunakan perekat sementara. Bila menggunakan planimeter polar, tempatkan titik tetap (*pivot point*) sedemikian rupa

sehingga lengan penjejak (*tracing arm*) dapat melingkupi kurva yang akan dicari luasnya dalam pergerakannya.

Kertas grafik ditempatkan pada sebuah tempat yang rata dan dipegang ujungujungnya dengan erat pada tempat rata itu menggunakan perekat sementara. Bila menggunakan planimeter polar, tempatkan titik tetap (*pivot point*) sedemikian rupa sehingga lengan penjejak (*tracing arm*) dapat melingkupi kurva yang akan dicari luasnya dalam pergerakannya.

Titik penjejak (*tracing point*) ditempatkan pertama kali pada awal terbentuknya kurva dan me-*reset* nilai penghitung dari penghitung mekanis pada nilai nol, kemudian penjejak digerakkan sepanjang bentuk kurva (sesuai arah jarum jam) sampai memotong kembali sumbu-x pada  $y = 0$ , dan penjejak diarahkan kembali ke awal terbentuknya kurva. Bila telah sampai ke awal terbentuknya kurva, maka penjejak dihentikan dan besar nilai faktor luasan dapat dilihat pada penghitung mekanis dari planimeter tersebut. Luasan dibawah kurva ditentukan dengan menghubungkannya pada faktor skala dari skala satuan yang digunakan dan luasan dari satu kotak tadi.

### **3.3. Metoda Analisa Grafik**

Dari grafik hasil pengukuran (Gambar 1), maka langkah pertama adalah dengan menentukan panjang waktu pengukuran parameter listrik dalam satuan waktu yaitu detik. Langkah selanjutnya yaitu dengan menarik garis rerata dari tinggi kurva yang bentuknya bervariasi. Dengan mengalikan hasil-hasil tersebut, yaitu antara waktu pengukuran parameter listrik dan parameter listrik rerata, maka didapatkan parameter total (atau luasan dibawah kurva).

### **3.4. Metoda Polinomial Orde Pertama**

Perhitungan dengan cara polinomial orde pertama adalah dengan membuatnya dalam bentuk tabel atau algoritmanya diuraikan didalam pemrograman komputer, sehingga dengan memasukkan harga-harga parameter listrik terukur dan harga  $\Delta t$  dari grafik hasil pengukuran, dapat diperoleh harga parameter total.

### **3.5. Metoda Analisa Numerik**

Metoda analisa numerik dengan aturan Trapezoidal, Simpson-1/3, dan Simpson3/8), perhitungan dengan aturan ini, dapat dibuat kedalam sebuah bentuk tabel (Tabel 1), atau algoritmanya diuraikan ke dalam pemrograman komputer dengan ketentuan sebagai berikut:

$h = (b - a) / n =$  jarak nomor ordinat (pada sumbu-x).

$y =$  besar ordinat (tinggi masing-masing ordinat).

$b =$  batas akhir kurva yang memotong sumbu-x pada  $y = 0$ .

$a =$  batas awal kurva yang memotong sumbu-x pada  $y = 0$ .

$n =$  jumlah nomor ordinat.

$\Sigma f_L =$  jumlah fungsi luas.

Sehingga untuk luasan di bawah kurva dapat dicari dengan membuat Tabel atau dalam bentuk program komputer yang algoritmanya diuraikan dari rumusan aturan Trapezoidal, Simpson-1/3 dan Simpson-3/8.

**Tabel 1.** Tabel perhitungan parameter total dengan metoda integrasi numerik.

Ordinat		Faktor			Fungsi Luas		
No	Besar	Trapz.	Simp-1/3	Simp-3/8	Trapz.	Simp-1/3	Simp-3/8
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(B × C)	(B × D)	(B × E)
1	$Y_1$	1	1	1	...	...	...
2	$Y_2$	2	4	3	...	...	...
3	$Y_3$	2	2	3	...	...	...
4	$Y_4$	2	4	2	...	...	...
5	$Y_5$	2	2	3	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
n-1	$Y_{n-1}$	2	4	3	...	...	...
N	$Y_n$	1	1	1	...	...	...
					$\Sigma f_{L1}$	$\Sigma f_{L2}$	$\Sigma f_{L3}$

Ptotal dari aturan Trapezoidal =  $(h/2) * \Sigma f_{L1}$

Ptotal dari aturan Simpson-1 =  $(h/3) * \Sigma f_{L2}$

Ptotal dari aturan Simpson-2 =  $(3h/8) * \Sigma f_{L3}$

Ptotal adalah parameter total.

### 3.6. Estimasi Kesalahan Dalam Penentuan Parameter Listrik Total

Kesalahan dalam penimbangan dari luasan kertas grafik hasil pengukuran. Ketelitian dan keakuratan nilai yang diberikan oleh alat timbangan, memberikan pengaruh nyata pada ketepatan nilai yang diukur dan apakah alat tersebut telah dikalibrasi dengan benar?. Disarankan menggunakan peraga digital yang telah dikalibrasi untuk mengurangi kesalahan paralaks.

Kesalahan dalam pengukuran mekanis menggunakan *planimeter*. Ketelitian, ketepatan dan kalibrasi pada *planimeter* adalah proporsional dengan alat timbangan, sebab *planimeter* merupakan peralatan mekanis dengan peraga analog ataupun peraga digital.

Kesalahan dalam analisa grafik. Penentuan dimana titik pada sumbu-X ditentukan dalam hubungan dengan waktu pembakaran dapat menyebabkan suatu kesalahan, dan penentuan garis rerata pada sumbu-Y dalam hubungan dengan gaya-dorong juga dapat memberikan suatu kesalahan, apabila besar kurva hasil pengukuran semakin kecil.

Kesalahan dalam polinomial orde pertama atau komputasi. Kesalahan yang terjadi pada komputasi terdiri dari: (1) kesalahan percobaan, kesalahan yang diberikan data dan kemungkinannya dari pengukuran, (2) kesalahan penulisan dari algoritma yang ditentukan, (3) kesalahan truncation, kesalahan pemotongan yang berhubungan dengan kenyataan bahwa sebuah pengulangan (tentu dan tak tentu) dari step komputasi, dan (4) kesalahan pembulatan dari angka-angka yang dihasilkan oleh komputer.

Kesalahan dalam penggunaan aturan Trapezoidal dan aturan Simpson. Bila dalam komputasi kita bekerja dengan nilai digit tertentu dan mengeluarkannya dalam step-step tertentu, maka metoda analisa numeris menjadi proses tertentu dan hasil numeriknya adalah sebuah nilai perkiraan dari hasil nyata. Jika  $a^*$  adalah sebuah nilai perkiraan dari sebuah kuantitas dengan nilai nyatanya sebesar  $a$ , maka perbedaannya adalah  $\varepsilon = a^* - a$  yang disebut kesalahan absolut atau dengan kata lain kesalahan dari  $a^*$  yaitu  $a^* = a + \varepsilon$  (nilai perkiraan = nilai sebenarnya + error). Kesalahan relatif  $\varepsilon_r$  dari  $a^*$  ditentukan berikut:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{error}}{\text{nilai sebenarnya}}$$

Koreksi  $\gamma = a - a^* = -\varepsilon$  jadi  $a = a^* + \gamma$  (nilai sebenarnya = nilai perkiraan + koreksi). Menurut W.Y. Yang et al. (2005), diberikan estimasi kesalahan dari aturan-aturan ini, yaitu: kesalahan ( $\epsilon$ ) adalah selisih antara hasil perhitungan metoda dengan hasil perhitungan sebenarnya dari integrasi sebuah luasan dibawah kurva.  $\epsilon = J^* - J$  maka untuk aturan Trapezoidal:  $K \cdot M^*_2 \leq \epsilon \leq K \cdot M_2$  dengan

$$K = \frac{(b - a)^2}{12 \cdot n^2}$$

$M^*_2$  = nilai terkecil turunan kedua dari fungsi pada interval integrasi.  $M_2$  = nilai terbesar turunan kedua dari fungsi pada interval integrasi.  $b$  = batas akhir integral.  $a$  =

batas awal integral.  $n$  = banyak ordinat sumbu-Y yang dihitung. Sementara untuk aturan Simpson:  $C \cdot M^*_2 \leq \epsilon \leq C \cdot M_2$  dengan

$$C = \frac{(b - a)^2}{180 \cdot (2n)^2}$$

$M^*_2$  = nilai terkecil turunan keempat dari fungsi pada interval integrasi.  $M_2$  = nilai terbesar turunan keempat dari fungsi pada interval integrasi.  $b$  = batas akhir integral.  $a$  = batas awal integral.  $n$  = banyak ordinat sumbu-Y yang dihitung atau kesalahan total ( $E_T$ ):

$$E_T = \frac{1}{180} \cdot f^{IV} \cdot (x_i) \cdot n \cdot w^5$$

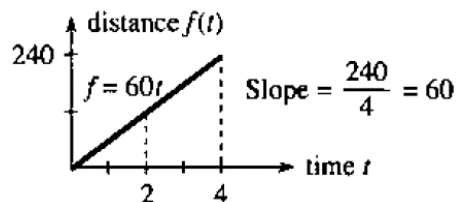
dan

$$|E_T| = \frac{1}{180} \cdot M \cdot (b - a) \cdot w^4$$

dengan:  $M$  = nilai maksimum dari turunan ke empat  $f(x)$  di  $a \leq x \leq b$ .  $w = x_{i-1} - x_i = -(x_{i-1} - x_i)$ .

### 3.7. Contoh Penggunaan Penentuan Luasan di Bawah Kurva Untuk Parameter Fisis

Menurut Gilbert Strang. Perolehan jarak dari kecepatan objek, jika kecepatan objek  $v$  sebesar 60 km dalam 1 jam, maka luasan di bawah kurva ( $f$ ) adalah sebesar 60 km, setelah 4 jam,  $f$  menjadi 240 km atau  $60 \cdot t$  (km/jam/jam), dapat kita katakan  $f$  bertambah secara linear dengan waktu, dan pada bentuk grafik dibuat sebuah garis lurus.



**Gambar 9. Perolehan jarak dari kecepatan objek.**

Jadi jika kecepatan objek  $v$  tetap, dan  $f$  mulai dari nol, maka  $f = v \cdot t$ . Kebalikannya adalah juga benar, jika  $f$  bertambah secara linear, maka kecepatan  $v$  adalah tetap. Pembagian dengan waktu menghasilkan *slope*. Secara geometris, kecepatan adalah *slope* grafik jarak.

$$slope = \frac{\text{perubahan dalam jarak}}{\text{perubahan dalam waktu}} = \frac{v \cdot t}{t}$$

Pertanyaannya adalah bagaimana menghitung  $f$  dari  $v$ ?. Jika kita perhatikan grafik diatas, maka kebalikan dari *slope* adalah luasan. Sehingga jarak  $f$  adalah luasan di bawah kurva dari grafik kecepatan. Bila  $v$  tetap, maka daerah di bawah kurva adalah segi empat

dengan tinggi  $v$ , lebar  $t$  dan luasannya adalah  $v$  kali  $t$ , hal ini berarti integrasi dari  $v$  ke  $f$  dengan menghitung luasan di bawah kurva. Kesimpulannya adalah *slope* dari grafik  $f$  memberikan kecepatan  $v$ , dan luasan di bawah kurva dari grafik kecepatan  $v$ , memberikan jarak  $f$ . Secara matematis, dapat ditulis sebagai berikut:

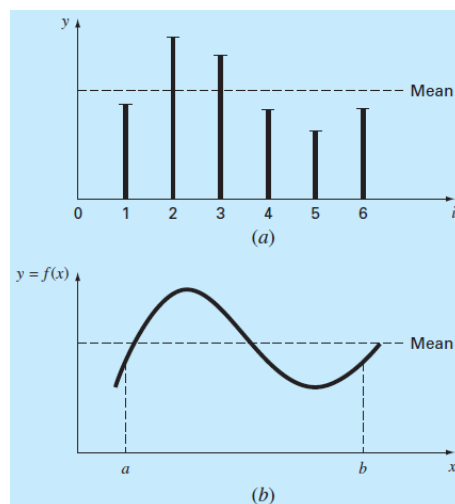
$$v(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

Dan

$$f(t) = \int_0^t v(t) dt$$

Menurut S.C. Chapra, R.P. Canale. (2015). Rerata kurva adalah konsep perolehan rerata dari data diskrit atau dari tabulasi data, dan fungsi kontinyu, yaitu:

$$Rerata = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \cong \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$



**Gambar 10. Ilustrasi perolehan rerata untuk (a), data diskrit dan (b) data kontinyu.**

Sebagai gambaran penggunaannya adalah dengan cara untuk memperoleh harga rerata dan harga efektif pada gelombang periodik (gelombang sinusoidal, eksponensial, dan kotak) Secara umum, harga rerata dari bentuk gelombang dapat diperoleh dari:

$$V_{rerata} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t) dt$$

Sedangkan harga efektifnya dapat diperoleh dari:

$$V_{efektif} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)^2 dt}$$

Menurut S.C. Chapra, R.P. Canale. (2015) pula, Massa total kandungan kimia di dalam sebuah reaktor diberikan sebagai perkalian konsentrasi kimia dan volume reaktor,  $massa = konsentrasi \times volume$  dengan konsentrasi mempunyai satuan massa/volume. Konsentrasi kimia bervariasi dari satu lokasi ke lokasi lainnya didalam reaktor. Dalam hal ini diperlukan untuk menjumlahkan dari perkalian konsentrasi lokal  $c_i$  dan berhubungan dengan volume elemental  $\Delta V_i$  adalah  $massa = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \Delta V_i$  dengan  $n$  adalah banyaknya volume diskrit. Untuk kasus kontinyu dengan  $c(x, y, z)$  sebagai fungsi yang diketahui, dan  $x, y, z$  sebagai variabel bebas yang posisinya pada koordinat kartesian, maka integrasi dapat digunakan yaitu:  $massa = \iiint c(x, y, z) dx \cdot dy \cdot dz$  atau  $massa = \iiint_V c(V) dV$  yang dapat diartikan sebagai integral volume.

Sementara menurut John Bird (2007) tentang analisa harmonik pada data yang diberikan dalam bentuk tabular atau bentuk grafik. Analisa harmonik merupakan proses solusi suatu periodik dari kuantitas nonsinusoidal, ke dalam suatu deret dari komponen-komponen sinusoidal pada orde frekuensi yang menaik (*ascending*).  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  yang dapat diartikan sebagai  $(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$  Koefisien-koefisien Fourier  $a_0, a_n, b_n$  adalah fungsi yang memerlukan integrasi, yaitu:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Sama dengan nilai rerata  $f(x)$  dalam jangkauan  $-\pi$  sampai  $+\pi$  atau jangkauan dari 0 sampai  $2\pi$ .

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

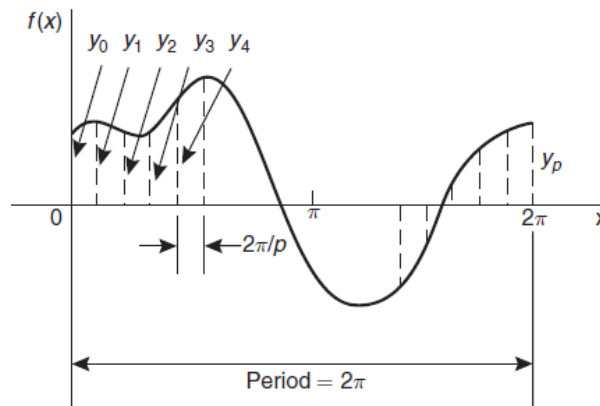
Sama dengan dua kali nilai rata-rata  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx$  dalam rentang 0 hingga  $2\pi$ .

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Sama dengan dua kali nilai rata-rata  $\sin nx$  dalam rentang 0 hingga  $2\pi$ . Sehingga untuk bentuk gelombang yang tak-tentu, adalah tidak dapat ditentukan dengan ekspresi matematis, dan koefisien-koefisien tak dapat ditentukan dengan kalkulus. Dalam hal ini, metoda pendekatannya adalah dengan menggunakan aturan Trapezoidal, yang dapat digunakan untuk mengevaluasi koefisien-koefisien fourier. Bentuk gelombang praktis yang umum untuk analisa adalah bentuk periodik. Periode bentuk gelombang adalah  $2\pi$ ,

dan dibagi kedalam sejumlah bagian ( $= p$ ) pada sumbu x. Lebar setiap interval menjadi  $2\pi/p$ . Ordinat pada sumbu-y dapat ditulis sebagai  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$  (catatan bahwa  $y_0 = y_p$ ) Aturan Trapezoidal menyatakan:

$$\begin{aligned} \text{Luas} &\approx \left( \begin{matrix} \text{lebar} \\ \text{interval} \end{matrix} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} \text{ordinat} \\ \text{awal} + \text{akhir} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \text{jumlah ordinat} \\ \text{sisanya} \end{matrix} \right) \right] \\ &\approx \frac{2\pi}{p} \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_p) + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \right] \end{aligned}$$



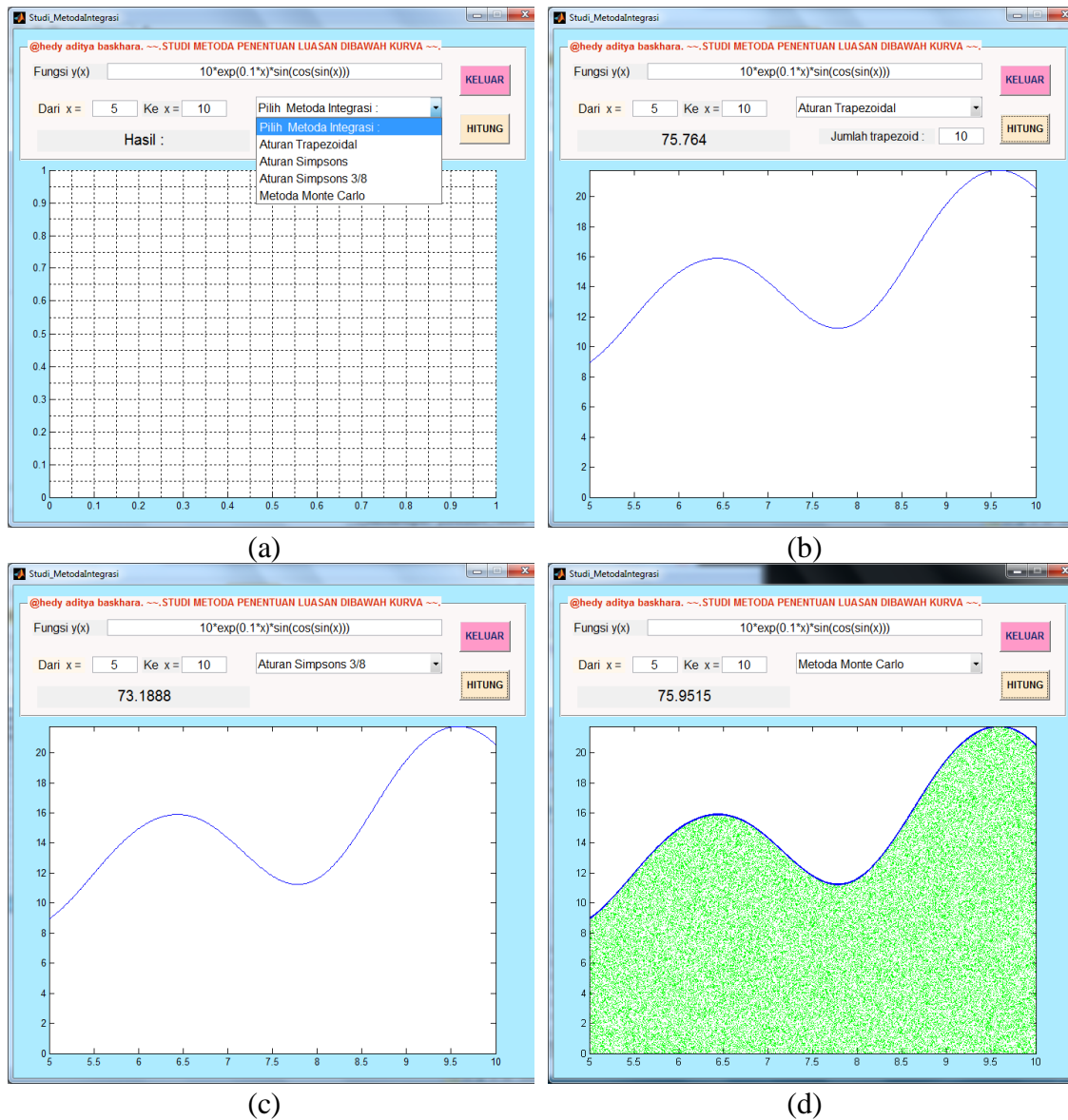
**Gambar 11. Ilustrasi periode  $2\pi$  dibagi jarak sama  $p$ .**

Karena  $y_0 = y_p$ , kemudian  $\frac{1}{2}(y_0 + y_p) = y_0 = y_p$  sehingga  $\text{Luas} \approx \frac{2\pi}{p} \sum_{k=1}^p y_k$   
 Nilai rerata =  $\frac{\text{luas}}{\text{panjang interval}} \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{p} \right) \sum_{k=1}^p y_k \approx \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k$  Jadi,  $a_0 =$  nilai rerata  $f(x)$  dalam jangkauan dari 0 sampai  $2\pi$ .  $a_0 \approx \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k$  dengan cara yang sama:  $a_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \cos nx_k$  dan  $b_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \sin nx_k$ .

### 3.8. Uji Coba Pemrograman Dengan Matlab R2007b

Untuk aturan Trapezoidal dan aturan Simpson telah dilakukan pemrograman menggunakan Matlab, dengan masukan suatu fungsi yang ditulis pada menu GUI (*graphics user interface*) yang dibuat pada Matlab. Hasil diberikan pula pada menu sesuai fungsi integrasi yang diberikan, untuk aturan Trapezoidal = 75,764, sedangkan pada aturan Simpson 3/8 diperoleh hasil = 73,1888. Hasil ini menunjukkan bahwa aturan Simpson 3/8 memberikan hasil yang lebih baik, oleh adanya kesalahan pada “Kesalahan dalam penggunaan aturan Trapezoidal dan aturan Simpson” yang mengindikasikan bahwa kesalahan aturan Trapezoidal lebih besar daripada aturan Simson 3/8.





**Gambar 12. Uji coba program untuk pengujian penentuan luasan di bawah kurva.**

### 3.9. Studi Metode Penentuan Luasan di Bawah Kurva Parameter Listrik Vs Waktu

Sebagai tindaklanjutnya, perlu dilakukan pengujian terhadap jenis-jenis metoda penentuan luasan di bawah kurva terhadap berbagai jenis pengukuran parameter listrik. Sebagai contoh, pengukuran daya listrik vs waktu, pengukuran harmonik, perhitungan jarak dari kecepatan, perhitungan kerja atau usaha untuk gaya vs jarak, dan seterusnya. Perhitungan dengan aturan-aturan ini, dapat dibuat dalam sebuah bentuk tabel (lihat Tabel 1), atau algoritmanya diuraikan kedalam pemrograman komputer. Jika telah diperoleh atau dipilih metoda yang sederhana dan akurat dalam perhitungannya, maka dapat diaplikasikan kedalam berbagai bentuk perhitungan luasan dibawah kurva menggunakan

bahasa pemrograman level rendah sampai level tinggi, tergantung kepada aplikasi yang ditentukan.

#### 4. SIMPULAN

Menghitung luasan di bawah kurva menggunakan bentuk tabel, atau dalam bentuk perangkat lunak komputer yang algoritmanya diuraikan dari rumusan aturan-aturan tersebut diatas, diharapkan parameter (luas total) untuk analisa kelistrikan dapat dihasilkan dengan lebih baik, dan ketelitian yang meningkat. Metoda yang mudah dalam penerapan dan cukup akurat adalah aturan Simpson.

#### 5. DAFTAR PUSTAKA

- C.A. Thompson. (1992). A study of numerical integration techniques for use in the companion circuit method of transient circuit analysis, Purdue University School of Electrical Engineering, TR-EE 92-17.
- J.P. Holman. (2012). Experimental Methods for Engineers 8<sup>ed</sup>. McGraw-Hill Companies Inc. 2. pb. 264-270. [www.mhhe.com](http://www.mhhe.com).
- R.A. Nakka. (2000). Determining Total Impulse and Specific Impulse from Static Test Data., Richard Nakka's Experimental Rocketry WebSite, pb. <http://www.nakkarocketry.net/impcalc.html>.
- R.L. Burden, J.D. Faires. (2011). Numerical Analysis 9<sup>ed</sup>. Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, MA02210, USA, pb. 193-253. [www.cengage.com](http://www.cengage.com).
- W.Y. Yang et al. (2005). Applied Numerical Methods using Matlab. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey. pp. 222-241.
- Jaan Kiusalaas. (2010). Numerical Methods in Engineering with Matlab 2<sup>ed</sup>. Cambridge University Press, New York. USA. pp. 198-247. [www.cambridge.org](http://www.cambridge.org).
- S.C. Chapra, R.P. Canale. (2010). Numerical Methods for Engineers 6<sup>ed</sup>. McGraw-Hill Companies Inc, pb.601652. [www.mhhe.com](http://www.mhhe.com).
- S.C. Chapra, R.P. Canale. (2015). Numerical Methods for Engineers 7<sup>ed</sup>. McGraw-Hill Education, pb.587654. [www.mhhe.com](http://www.mhhe.com).
- S.C. Chapra. (...). Applied Numerical Methods with Matlab for engineers and scientist 2<sup>ed</sup>. Ebook. pb. 392-422.
- J.D. Hoffman. Numerical Methods for Engineers & Scientists 2<sup>ed</sup>. Marcel Dekker Inc.

- USA. 2001. pb. 285316. <http://www.dekker.com>.
- Erwin Kreyszig. (2011). Advanced Engineering Mathematics 10<sup>ed</sup>. John Wiley & Sons, Inc. Printed in USA. pb. 827-838. <http://www.wiley.com/college/kreyszig>.
- John Bird. (2007). Engineering Mathematics 5<sup>ed</sup>. Elsevier Ltd, Netherlands. pb. 469-486. <http://www.elsevier.com>.
- John Bird. (2014). Basic Engineering Mathematics 6<sup>ed</sup>. Routledge Taylor & Francis Group. Newnes. New York. pb. 290-299.
- W.N. Rose. (1922). Mathematics for Engineers part-1 3<sup>ed</sup>. Chapman & Hall Ltd, London, pb. 300-318. <http://www.archive.org/details/mathematicsforen01roseuoft>.
- Gilbert Strang. (...). Calculus. Massachusetts Institute of Technology. Wellesley-Cambridge Press. Box 82279 Wellesley MA 02181. pb. 220-226.
- Hadi Saadat. (1999). Power System Analysis. McGraw-Hill Companies Inc, USA. pb. 460-520.
- John Bird. (2007). Electrical Circuit Theory & Technology 3<sup>ed</sup>. Elsevier Ltd. Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, UK. pb 480-485.
- S.E. Pav. (2005). Numerical methods course notes v0.11, UCSD Math 174, Fall 2004, University of California, San Diego. pc. 97-112.