P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

APLIKASI ARITMATIKA MODULAR DALAM PENGKLASIFIKASIAN KELAS KONJUGASI GRUP DIHEDRAL D_{2n}

Nugraha Kristiano Floresda Dethan[1*], Faustianus Luan[2]

[1]Program Studi Matematika, Universitas Timor
*Email Korespondensi: nugrahadethan@unimor.ac.id
[2]Program Studi Matematika, Universitas Timor
Email: faustyluan57@gmail.com

ABSTRACT

Let $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, det(A) \neq 0\right\}$. *Then it follows that* $\sigma = \begin{bmatrix} cos(2\pi/n) & sin(2\pi/n) \\ -sin(2\pi/n) & cos(2\pi/n) \end{bmatrix}$ *and* $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *are elements of* $GL_2(\mathbb{R})$. *A dihedral grup* D_{2n} *is a symmetry group of a regular polygon with n sides generated by* σ *and* τ. *The classification of the conjugacy classes of the dihedral group* D_{2n} *has been carried out using modular arithmetic. This paper discusses some basic properties of modular arithmetic, dihedral groups, conjugate classes, and conjugacy classes of dihedral groups in particular. The results obtained from this study are that there are three types of conjugacy classes of the dihedral group* D_{2n} *for odd* n *and four types of conjugacy classes of dihedral group* D_{2n} *for even* n.
Keywords: Modular arithmetic, Dihedral groups, Conjugacy classes

ABSTRAK

Misalkan $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, det(A) \neq 0\right\}$. Maka jelas bahwa $\sigma = \begin{bmatrix} cos(2\pi/n) & sin(2\pi/n) \\ -sin(2\pi/n) & cos(2\pi/n) \end{bmatrix}$ dan $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ merupakan dua elemen dari $GL_2(\mathbb{R})$. Grup dihedral merupakan grup simetri dari poligon beraturan dengan n sisi yang dibangkitkan oleh σ dan τ. Telah dilakukan suatu kajian terhadap klasifikasi kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan menggunakan arimatika modular. Tulisan ini membahas dan membuktikan beberapa sifat dasar arimatika modular, grup dihedral, kelas konjugasi, dan kemudian kelas konjugasi untuk grup dihedral secara khusus. Hasil yang diperoleh dari kajian ini adalah terdapat tiga jenis kelas konjugasi pada grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan empat jenis kelas konjugasi pada grup dihedral D_{2n} untuk n genap.
Kata kunci: Aritmatika modular, Grup dihedral, Kelas konjugasi

1. PENDAHULUAN

Secara garis besar, teori grup adalah bagian dalam aljabar abstrak yang mempelajari tentang simetri. Grup simetri dari suatu obyek merupakan himpunan semua transformasi yang tidak merubah tampilan dari obyek tersebut. Teori grup pada awalnya dikembangkan oleh Évariste Galois pada tahun 1830an untuk mencari kriteria penyelesaian suatu persamaan polinomial dengan menggunakan grup simetri dari akar-akar polinomial tersebut (Alladi,

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

2013). Seiring dengan berjalannya waktu, ditemukan bahwa konsep-konsep dalam teori grup memiliki aplikasi yang signifikan dalam kimia dan fisika. Dalam kimia contohnya, simetri dari suatu molekul memberikan informasi tentang sifat fisik dari molekul tersebut (Ceulemans, 2013).

Grup merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner yang mengkombinasikan dua anggota dari himpunan itu sehingga membentuk anggota ketiga, yang juga bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan elemen invers. Jumlah anggota atau orde dari suatu grup dapat berhingga atau tak hingga. Apabila suatu grup memiliki jumlah anggota berhingga maka grup itu dikatakan grup hingga.

Kelas konjugasi dari suatu grup berisikan anggota-anggota yang dihubungkan oleh sebuah operasi yang disebut konjugasi. Jika a dan b merupakan anggota suatu grup G, maka kedua anggota ini dikatakan konjugat apabila terdapat suatu anggota $g \in G$ sedemikian sehingga $a = gbg^{-1}$. Kelas-kelas konjugasi mempartisi anggota-anggota dalam suatu grup menjadi himpunan-himpunan bagian saling lepas, yang dapat digunakan untuk mengklasifikan grup tersebut. Sebagai contoh, kelas-kelas konjugasi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa dua grup tidak isomorfik. Secara umum, ukuran dari kelas-kelas konjugasi dalam suatu grup mengandung informasi terkait struktur dari grup tersebut. Tulisan ini membahas tentang kelas konjugasi salah satu subgrup (D_{2n}) dari grup orthogonal 0_2 yang merupakan grup simetri dari sebuah lingkaran di $\mathbb{R}^2$.

2. METODOLOGI

Penelitian ini merupakan penelitian kajian eksplorasi dengan mengkaji beberapa jurnal, buku, dan sumber lainnya dari internet. Objek yang diteliti adalah grup dihedral D_{2n} yang merupakan grup simetri berhingga dari polygon beraturan dengan n sisi. Setelah menjelaskan tentang grup dihedral dan kelas konjugasi grup secara umum, penulis akan melakukan pembuktian pengklasifikasian kelas-kelas konjugasi untuk grup dihedral D_{2n}. Hal ini dilakukan dengan mempertimbangkan dua kasus, yaitu untuk n genap dan n ganjil.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Grup, Grup Dihedral, Arimatika Modular dan Kelas Konjugasi

Sebelum membuktikan pengklasifikasian kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral, penting untuk memahami beberapa konsep berikut.

Definisi 3.1. (Canals & Schober, 2012) Suatu grup G adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu pemetaan

$$* : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g * h = gh,$$

yang disebut pemetaan *perkalian*, dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. Asosiatif: Jika $g, h, k \in G$, maka $(gh)k = g(hk)$.
b. Eksistensi elemen identitas: terdapat suatu elemen $e \in G$, yang disebut identitas dari G sedemikian sehingga $eg = ge = g$ untuk setiap $g \in G$.
c. Elemen invers: Untuk setiap $g \in G$, terdapat suatu elemen $g^{-1} \in G$, yang disebut invers dari g, sedemikian sehingga $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Definisi 3.2. Misalkan H adalah suatu himpunan bagian dari grup G. Maka H dikatakan *subgrup* dari G, dinotasikan dengan $H \leq G$, apabila H memenuhi kondisi-kondisi berikut:

a. Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$.
b. Memuat elemen identitas, yakni $e \in H$.
c. Untuk setiap $a \in H$, $a^{-1} \in H$.

Definisi 3.3. Suatu grup G dikatakan abelian atau komutatif apabila untuk setiap $g, h \in G$ berlaku $gh = hg$.

Teorema 3.4. (Grup matriks) Himpunan $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R}, det(A) \neq 0\right\}$ dengan operasi perkalian matriks merupakan grup (Artin, 2010).

Teorema 3.5. (Grup Orthogonal) Himpunan $O_2 = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$ dengan operasi perkalian matriks merupakan subgrup dari $GL_2(\mathbb{R})$ (Hal ini dapat ditulis $O_2 \leq GL_2(\mathbb{R})$) (Majid et al., 2019).

Contoh 3.6. Himpunan bilangan asli $\mathbb{Z}$ dengan penjumlahan biasa + merupakan grup abelian. Elemen identitas dalam grup ini adalah 0, dan invers dari $a \in \mathbb{Z}$ adalah $-a$.

Definisi 3.7. (Artin, 2010) Misalkan H merupakan subgrup dari G. Koset (kiri) dari H dalam G adalah himpunan

$$gH = \{gh : h \in H\} \text{ untuk suatu } g \in G.$$

Himpunan semua koset kiri dari H dalam G dinotasikan dengan G/H .

Contoh 3.8. (Rose, 2009) Misalkan $G = (\mathbb{Z}, +)$ dan $m > 0$. Himpunan $m\mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat kelipatan m) merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$. Dengan menggunakan notasi penjumlahan, koset-koset kiri dari $m\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$ memiliki bentuk

$$r + m\mathbb{Z} = \{r + mq : q \in \mathbb{Z}\} \text{ untuk semua } 0 \leq r < m.$$

Perhatikan bahwa $r + m\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat yang memiliki sisa r setelah dibagi m. Perhatikan pula bahwa $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1) + m\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ merupakan grup abelian dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan dengan

$$\bar{\imath} + \bar{\jmath} = \begin{cases} \overline{\imath + \jmath}, & i + j < m \\ \overline{\imath + \jmath - m}, & i + j \geq m. \end{cases}$$

Berikut adalah definisi aritmatika modular.

Definisi 3.9. (Rose, 2009) Diberikan $m \in \mathbb{Z}^+$. Dua bilangan bulat a dan b dikatakan *kongruen modulo* m, atau ditulis $a \equiv b \pmod{m}$, apabila $a, b \in \bar{r}$ untuk suatu $\bar{r} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $a \equiv b \pmod{m}$, apabila $a - b \in m\mathbb{Z}$.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

Definisi 3.10. (Rose, 2009)
1. Misalkan G grup dan $S \subseteq G$. Misalkan pula $\mathcal{H}$ merupakan koleksi subgrup dari G yang memuat S. Subgrup $\langle S \rangle \coloneqq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ disebut subgrup yang dibangkitkan oleh S. Subgrup ini adalah subgrup terkecil yang memuat S.
2. Suatu grup G dikatakan terbangkit hingga apabila terdapat himpunan berhingga $S \subseteq G$ sedemikian hingga $G = \langle S \rangle$. Apabila $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ maka ditulis $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$.
3. Grup G dikatakan grup siklik apabila $G = \langle g \rangle$ untuk suatu $g \in G$.

Proposisi 3.11. Misalkan G adalah grup. Jika $S \subseteq G$ dan $S^{-1} = \{ s^{-1} : s \in S \}$, maka

$$\langle S \rangle = \{s_1 s_2 \cdots s_n : s_i \in S \cup S^{-1}, n \geq 0 \}.$$

Bukti. Misalkan $K = \{s_1 s_2 \cdots s_n : s_i \in S \cup S^{-1}, n \geq 0 \}$, dan $\mathcal{H}$ adalah koleksi semua subgrup dari G yang memuat S. Dari pendefinisian K, terlihat bahwa $K \leq G$. Karena $S \subseteq K$, maka diperoleh $K \in \mathcal{H}$ dan untuk itu $\langle S \rangle \subseteq K$.
Di sisi lain, untuk sembarang $H \in \mathcal{H}$, argumen yang sama menunjukkan bahwa $K \leq H$. Untuk itu $K \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \langle S \rangle$. Sehingga disimpulkan bahwa $K = \langle S \rangle$.

Contoh 3.12. Misalkan $n \in N$ dengan $n \geq 2$. Seperti apakah subgrup dari $GL_2(\mathbb{R})$ yang dibangkitkan oleh

$$\sigma = \begin{bmatrix} cos(2\pi/n) & sin(2\pi/n) \\ -sin(2\pi/n) & cos(2\pi/n) \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}?$$

Perhatikan bahwa σ merupakan rotasi sebesar $2\pi/n$ terhadap titik pusat di $\mathbb{R}^2$ dan τ merupakan refleksi terhadap sumbu-x. Untuk itu didapatkan hubungan $\sigma^n = 1 = \tau^2$. Keduanya merupakan simetri dari poligon beraturan dengan n sisi. Perhatikan pula bahwa σ dan τ tidak komutatif, dan berlaku relasi $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$.

Definisi 3.13. Subgrup $\langle \sigma, \tau \rangle$ dari $GL_2(\mathbb{R})$ yang dijelaskan pada contoh 3.11. di atas disebut grup dihedral, yang dinotasikan dengan D_{2n}.

Berdasarkan proposisi 3.10, maka diperoleh

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{\sigma^{i_1}\tau^{j_1}\sigma^{i2}\tau^{j_2} \ldots \sigma^{i_r}\tau^{j_r} : i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{0,1, \ldots, n-1\}, j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{0,1\}, r \geq 0\}. \quad (1)$$

Proposisi 3.14. $D_{2n} = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$, sehingga $|D_{2n}| = 2n$.

Bukti. Relasi $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ memberikan $\tau\sigma^{\mathrm{i}} = \sigma^{-i}\tau$. Hal ini memungkinkan untuk memindahkan semua τ dari elemen-elemen dalam persamaan (1) ke sisi kanan. Ini menunjukkan bahwa setiap anggota dalam D_{2n} memiliki bentuk $\sigma^i\tau^j$. Untuk itu diperoleh bahwa $D_{2n} = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

Hal selanjutnya adalah menunjukkan bahwa anggota-anggota dalam grup ini saling berbeda. Pertama perhatikan bahwa σ^i saling berbeda untuk $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ karena merepresentasikan rotasi yang saling berbeda. Kemudian perhatikan pula bahwa $\det(\sigma^i) = 1$ dan $\det(\sigma^i\tau) = -1$ untuk semua i, sehingga σ^i dan $\sigma^k\tau$ merupakan elemen-elemen yang saling berbeda untuk setiap i dan k. Kemudian diperoleh juga bahwa setiap $\sigma^i\tau$ saling berbeda untuk $i = 0,1,\dots,n-1$ karena apabila $\sigma^i\tau = \sigma^k\tau$ untuk $i,k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, maka menurut hukum kanselasi, $\sigma^i = \sigma^k$, sehingga diperoleh $i = k$. Jadi $\sigma^i\tau$ saling berbeda untuk $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

Setiap anggota dalam D_{2n} merupakan rotasi atau refleksi yang merupakan simetri dari poligon beraturan dengan n sisi.

Definisi 3.15. Misalkan G adalah grup dan $g \in G$. Didefinisikan *konjugasi oleh* g sebagai fungsi $\phi_g: G \to G$ dengan $h \mapsto ghg^{-1}$.

Relasi pada G yang didefinisikan dengan

$$h' \sim h \Leftrightarrow h' = \phi_g(h) \text{ untuk suatu } g \in G$$

merupakan relasi ekuivalensi. Kelas-kelas ekuivalensi yang dibentuk oleh relasi ini disebut dengan kelas-kelas konjugasi.

3.2. Klasifikasi Kelas Konjugasi Grup Dihedral D_{2n}

Pengklasifikasian kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dibagi menjadi dua bagian, yakni untuk n ganjil dan n genap.

Teorema 3.16. Misalkan $n \geq 1$ merupakan bilangan ganjil dan D_{2n} merupakan grup dihedral yang dibangkitkan oleh σ dan τ, seperti yang dijelaskan dalam Proposisi 3.14. Maka kelas-kelas konjugasi dari D_{2n} memiliki bentuk

- $\{1\}$, dimana $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2,\dots,(n-1)/2$, dan
- $\{\tau, \sigma\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

Bukti. Pertama, perhatikan bahwa untuk setiap $g \in D_{2n}$, berlaku $g1g^{-1} = 1$. Untuk itu kelas konjugasi dari elemen identitas adalah $\{1\}$.

Kedua, misalkan $\sigma^i \in D_{2n}$ untuk suatu $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Akan ditunjukkan bahwa $g\sigma^i g^{-1}$ adalah σ^i atau σ^{-i}, untuk setiap $g \in D_{2n}$. Untuk $g = \sigma^j \in D_{2n}$, untuk suatu $j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, diperoleh

$$g\sigma^i g^{-1} = \sigma^j \sigma^i \sigma^{-j} = \sigma^{j+i-j} = \sigma^i.$$

Kemudian untuk $g = \sigma^j\tau \in D_{2n}$ untuk suatu $j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, diperoleh

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

$$g\sigma^i g^{-1} = (\sigma^j\tau)\sigma^i(\sigma^j\tau)^{-1} = (\sigma^j\tau)\sigma^i(\tau^{-1}\sigma^{-j}) = \sigma^j(\tau\sigma^i\tau)\sigma^{-j} = \sigma^{j-i}\tau^2\sigma^{-j} = \sigma^{-i}.$$

Karena n ganjil, maka σ^i dan σ^{-i} saling berbeda dan kedua kalkulasi diatas menunjukkan bahwa σ^i dan σ^{-i} memiliki kelas konjugasi yang sama, yaitu $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$. Untuk itu, terdapat $\frac{n-1}{2}$ kelas konjugasi yang memiliki bentuk seperti ini.

Ketiga, misalkan $\sigma^i\tau \in D_{2n}$ untuk suatu $i \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$. Akan ditunjukkan bahwa kelas konjugasi dari elemen ini adalah $\{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$. Jika $g = \sigma^j$ untuk suatu $j \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$, diperoleh

$$g(\tau\sigma^i)g^{-1} = \sigma^j(\sigma^i\tau)\sigma^{-j} = \sigma^{2j+i}\tau.$$

Pada tahap ini, dapat diambil i sama dengan 0 atau 1, di mana $i = 0$ merepresentasikan i genap dan $i = 1$ merepresentasikan i ganjil. Akan ditunjukkan bahwa hasilnya akan sama untuk kedua kasus ini ketika j bervariasi. Untuk $i = 0$, diperoleh semua pangkat genap dari σ ketika j bervariasi dari 0 sampai $\frac{n-1}{2}$ (yakni diperoleh $\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau$). Kemudian karena n ganjil, juga diperoleh semua pangkat ganjil dari σ ketika j bervariasi dari $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ sampai $n-1$, hal ini dikarenakan $2\left(\frac{n+1}{2}\right) = n + 1 \equiv 1 \pmod{n}$, $2\left(\frac{n+3}{2}\right) = n + 3 \equiv 3 \pmod{n}, \dots$, $2(n-1) \equiv n-2 \pmod{n}$ (yakni diperoleh $\sigma\tau, \sigma^3\tau, \dots, \sigma^{n-2}\tau$). Untuk itu diperoleh semua pangkat dari σ ketika j bervariasi dari 0 ke $n-1$ untuk kasus ini.

Untuk kasus $i = 1$, diperoleh semua pangkat dari σ ketika j bervariasi dari 0 ke $\frac{n-3}{2}$. Kemudian karena n ganjil, diperoleh semua pangkat genap dari σ ketika j bervariasi dari $\frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$ ke $n-1$ karena $2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n \equiv 0 \pmod{n}, \dots,$ $2(n-1) + 1 \equiv n - 1 \pmod{n}$. Jadi, untuk setiap i, diperoleh

$$\{\sigma^j(\sigma^i\tau)\sigma^{-j} : j = 0,1,2, \dots, n-1\} = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}.$$

Jika $g = \sigma^j\tau$ untuk suatu $j \in \{1,2, \dots, n-1\}$, diperoleh

$$g(\sigma^i\tau)g^{-1} = \sigma^j\tau(\sigma^i\tau)\tau\sigma^{-j} = \sigma^{2j-i}\tau,$$

Sehingga dengan argumen yang sama dengan sebelumnya memberikan hasil yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa kelas konjugasi dari $\sigma^i\tau$ adalah $\{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$ untuk setiap $i \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$.

Teorema 3.17. Misalkan $n \geq 1$ merupakan bilangan genap dan D_{2n} merupakan grup dihedral yang dibangkitkan oleh σ dan τ, seperti yang dijelaskan dalam Proposisi 3.14. Maka kelas-kelas konjugasi dari D_{2n} adalah

- Dua kelas konjugasi yang memiliki satu anggota: $\{1\}$ dan $\{\sigma^{n/2}\}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$,
- $\{\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau, \dots, \sigma^{n-2}\tau\}$ dan
- $\{\sigma\tau, \sigma^3\tau, \sigma^5\tau \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

Bukti. Pertama, perhatikan bahwa untuk setiap $g \in D_{2n}$, berlaku $g1g^{-1} = 1$. Untuk itu kelas konjugasi dari elemen identitas adalah $\{1\}$. Kemudian diperoleh bahwa $g\sigma^{n/2}g^{-1} = \sigma^{n/2}$ karena apabila $g = \sigma^i$, maka $\sigma^i\sigma^{n/2}\sigma^{-i} = \sigma^{n/2}$ dan apabila $g = \sigma^i\tau$, maka $(\sigma^i\tau)\sigma^{n/2}(\sigma^i\tau)^{-1} = \sigma^{-n/2} = \sigma^{n/2}$ untuk setiap i. Untuk itu kelas konjugasi dari $\sigma^{n/2}$ adalah $\{\sigma^{n/2}\}$.

Kedua, misalkan $\sigma^i \in D_{2n}$ untuk suatu $i \in \{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\dots,n-1\}$. Akan ditunjukkan bahwa $g\sigma^i g^{-1}$ adalah σ^i atau σ^{-i}, untuk setiap $g \in D_{2n}$. Untuk $g = \sigma^j \in D_{2n}$, untuk suatu $j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, diperoleh

$$g\sigma^i g^{-1} = \sigma^j\sigma^i\sigma^{-j} = \sigma^{j+i-j} = \sigma^i.$$

Kemudian untuk $g = \sigma^j\tau \in D_{2n}$ untuk suatu $j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, diperoleh

$$g\sigma^i g^{-1} = (\sigma^j\tau)\sigma^i(\sigma^j\tau)^{-1} = (\sigma^j\tau)\sigma^i(\tau^{-1}\sigma^{-j}) = \sigma^j(\tau\sigma^i\tau)\sigma^{-j} = \sigma^{j-i}\tau^2\sigma^{-j} = \sigma^{-i}.$$

Karena $i \in \{1,2,\dots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\dots,n-1\}$, maka σ^i dan σ^{-i} saling berbeda dan kedua kalkulasi diatas menunjukkan bahwa σ^i dan σ^{-i} memiliki kelas konjugasi yang sama, yaitu $\{\sigma^i,\sigma^{-i}\}$. Untuk itu, terdapat $\frac{n}{2}-1$ kelas konjugasi yang memiliki bentuk seperti ini.

Ketiga, misalkan $\sigma^i\tau \in D_{2n}$ untuk suatu $i \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat dua jenis kelas konjugasi dari elemen ini, bergantung dari apakah i genap atau ganjil; kelas konjugasi dari $\sigma^i\tau$ untuk i genap adalah $\{\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau\dots,\sigma^{n-2}\tau\}$, sedangkan kelas konjugasi dari $\sigma^i\tau$ untuk i ganjil adalah $\{\sigma\tau,\sigma^3\tau,\sigma^5\tau,\dots,\sigma^{n-1}\tau\}$.
Jika $g = \sigma^j$ untuk suatu $j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, maka diperoleh

$$g(\tau\sigma^i)g^{-1} = \sigma^j(\sigma^i\tau)\sigma^{-j} = \sigma^{2j+i}\tau.$$

Seperti pada sebelumnya, ambil i sama dengan 0 atau 1, di mana $i = 0$ merepresentasikan i genap dan $i = 1$ merepresentasikan i ganjil. Untuk $i = 0$, maka oleh karena n genap, hanya diperoleh pangkat genap dari σ untuk semua j (yakni diperoleh $\{\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau,\dots,\sigma^{n-2}\tau\}$). Untuk $i = 1$, maka oleh karena n genap, hanya diperoleh pangkat ganjil dari σ untuk semua variasi j (yakni diperoleh $\{\sigma\tau,\sigma^3\tau,\ \sigma^5\tau\dots,\ \sigma^{n-1}\tau\}$).

Jika $g = \sigma^j\tau$ untuk suatu $j \in \{1,2,\dots,n-1\}$, maka

$$g(\sigma^i\tau)g^{-1} = \sigma^j\tau(\sigma^i\tau)\tau\sigma^{-j} = \sigma^{2j-i}\tau,$$

Sehingga dengan argumen yang sama dengan sebelumnya diperoleh hasil yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $i \in \{0,2,4,\dots,n-2\}$, kelas konjugasi dari $\sigma^i\tau$ adalah $\{\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau,\dots,\sigma^{n-2}\tau\}$ dan untuk $i \in \{1,3,5,\dots,n-1\}$, kelas konjugasi dari $\sigma^i\tau$ adalah $\{\sigma\tau,\sigma^3\tau,\ \sigma^5\tau\dots,\ \sigma^{n-1}\tau\}$.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-9, Halaman: 96-103

4. SIMPULAN

Kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} terbagi menjadi dua, yakni untuk n ganjil dan n genap. Kelas-kelas konjugasi dari D_{2n} untuk n ganjil adalah

- $\{1\}$, dimana $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2, \dots, (n-1)/2$, dan
- $\{\tau, \sigma\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

Sedangkan kelas-kelas konjugasi dari D_{2n} untuk n genap adalah

- Dua kelas konjugasi yang memiliki satu anggota: $\{1\}$ dan $\{\sigma^{n/2}\}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1$,
- $\{\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau, \dots, \sigma^{n-2}\tau\}$ dan
- $\{\sigma\tau, \sigma^3\tau, \sigma^5\tau \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

Saran: diperlukan penelitian lanjutan untuk menentukan kelas-kelas konjugasi dari grup S_n, yang merupakan grup permutasi dari n huruf. Pada dasarnya D_{2n} merupakan subgrup dari S_n.

5. DAFTAR PUSTAKA

Alladi, K. (2013). Evariste Galois: Founder of Group Theory. In *Ramanujan's Place in the World of Mathematics* (pp. 51–56). Springer India. https://doi.org/10.1007/978-81-322-0767-2_9

Artin, M. (2010). *Algebra* (2nd ed.). Pearson.

Canals, B., & Schober, H. (2012). Introduction to group theory. *EPJ Web of Conferences*, *22*, 00004. https://doi.org/10.1051/epjconf/20122200004

Ceulemans, A. J. (2013). *Group Theory Applied to Chemistry*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6863-5

Majid, A. A., Yanita, Y., & Bakar, N. N. (2019). Sifat-Sifat Matriks Ortogonal dan Transformasi Ortogonal. *Jurnal Matematika UNAND*, *8*(2), 7. https://doi.org/10.25077/jmu.8.2.7-14.2019

Rose, H. E. (2009). *A Course on Finite Groups*. Springer London. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-889-6