

## Bilangan Keterhubungan Pelangi Dan Keterhubungan Pelangi Kuat Pada Beberapa Kelas Graf Korona

Alfi Maulani

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pamulang, Tangerang

[dosen02330@unpam.ac.id](mailto:dosen02330@unpam.ac.id)

**Abstrak.** Bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf  $G$ , disimbolkan  $rc(G)$ , adalah banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai busur-busur di  $G$  sedemikian rupa sehingga setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh suatu lintasan yang warnanya berbeda semua. Bilangan keterhubungan pelangi kuat dari suatu graf  $G$ , disimbolkan  $src(G)$ , adalah banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai busur-busur di  $G$  sedemikian rupa sehingga setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh suatu lintasan geodesik (lintasan terpendek) yang warnanya berbeda semua. Operasi korona graf  $G$  terhadap  $H$ , dinotasikan  $G \odot H$  menghasilkan graf baru dengan konstruksi mengambil 1 salinan graf  $G$  dengan  $n$  simpul dan  $n$  salinan  $H_1, H_2, \dots, H_n$  dari  $H$ , lalu menghubungkan simpul dari  $G$  ke setiap simpul di  $H_i$ . Tesis ini meliputi hasil kajian tentang  $rc$  dan  $src$  pada beberapa kelas graf korona yang terkait dengan  $P_m, F_m$  dan  $W_m$ .

Kata kunci : Korona, keterhubungan pelangi, keterhubungan pelangi kuat,  $P_m, F_m, W_m$

### 1. Pendahuluan

Misalkan graf  $G$  adalah graf terhubung tak *trivial* dan  $k$  adalah sebuah bilangan bulat positif, didefinisikan pewarnaan busur :  $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ , sehingga setiap dua busur yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Lintasan dari sebarang dua simpul di  $G$  adalah jalan dari sebarang dua simpul di  $G$  dimana tidak terjadi pengulangan simpul maupun busur. Suatu lintasan (*path*) dikatakan lintasan pelangi jika tidak ada dua busurnya yang memiliki warna sama. Graf  $G$  dikatakan terhubung pelangi jika setiap dua simpul yang berbeda di  $G$  dihubungkan oleh lintasan pelangi. Dalam hal ini, pewarnaan terhadap graf  $G$  tersebut disebut pewarnaan pelangi. Jika ada sebanyak  $k$  warna yang digunakan, maka pewarnaannya disebut pewarnaan- $k$  pelangi. Bilangan  $k$  disebut bilangan keterhubungan pelangi dari graf terhubung  $G$ , dilambangkan dengan  $rc(G)$  yang didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai busur graf  $G$  sehingga graf tersebut bersifat terhubung pelangi.

Misalkan  $c$  adalah pewarnaan pelangi dari graf terhubung  $G$ . Untuk setiap dua simpul  $u$  dan  $v$  di  $G$ , suatu  $u - v$  geodesik pelangi di  $G$  adalah lintasan pelangi  $u - v$  yang panjangnya  $dg(u, v)$ , dimana  $dg(u, v)$  adalah jarak antara  $u$  dan  $v$ . Graf  $G$  disebut terhubung

pelangi kuat jika memuat suatu  $u - v$  geodesik pelangi untuk setiap dua simpul  $u - v$  pada  $G$ . Dalam hal ini, pewarnaan  $c$  dinamakan pewarnaan pelangi kuat di  $G$ . Bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf terhubung  $G$ , dilambangkan dengan  $src(G)$ , didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat  $G$  menjadi

terhubung pelangi kuat (Chartrand, Johns, McKeon, & Zhang, 2008).

Topik tentang bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf sangat menarik untuk dikaji seperti yang dikemukakan oleh Li and Sun (2012), begitu juga dengan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari suatu graf. Dari hasil penelusuran literatur, banyak penelitian yang dilakukan tentang topik tersebut. Chartrand, Johns, McKeon and Zhang (2008) menentukan beberapa bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari beberapa kelas graf khusus seperti graf lintasan ( $P_m$ ), graf pohon ( $T_m$ ), graf lengkap ( $K_m$ ), graf roda ( $W_m$ ), graf bipartit lengkap ( $K_{m,n}$ ), dan graf multipartit lengkap ( $K_{m,m,m}$ ). Selanjutnya, Estetikasari and Syafrizal (2013) menentukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf kipas  $F_m$  dan graf matahari  $S_m$ . Lebih lanjut, Estetikasari and Syafrizal (2013) menentukan nilai-nilai eksak keterhubungan pelangi untuk beberapa graf korona, seperti  $K_1 \odot K_m$ ,  $K_1 \odot P_m$ ,  $K_m \odot K_1$ ,  $T_m \odot K_1$  dan  $W_m \odot K_1$ . Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada kelas graf korona yang terkait dengan graf lintasan ( $P_m$ ), graf kipas ( $F_m$ ) dan graf roda ( $W_m$ ).

## 2. Hasil-Hasil Penelitian Terdahulu

**Proposisi 1.** (Chartrand, Johns, McKeon, & Zhang, 2008) Misalkan  $G$  adalah graf terhubung tak-trivial dengan ukuran  $m$ , maka:

1.  $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ .
2.  $G$  adalah graf lengkap jika dan hanya jika  $rc(G) = 1$ .
3.  $rc(G) = 2$  jika dan hanya jika  $src(G) = 2$ .
4.  $rc(G) = src(G) = m$  jika dan hanya jika  $G$  suatu graf pohon.

**Proposisi 2.** (Chartrand, Johns, McKeon, & Zhang, 2008) Misalkan  $C_n$  adalah graf lingkaran dengan banyak titik  $n$  dimana  $n \geq 4$  maka  $rc(C_n) = src(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

**Lemma 1.** (Maulani, Pradini, Setyorini, & Sugeng, 2017) Lintasan terdekat dari dua simpul sembarang  $(v_a, v_b | a, b = 1, 2, \dots, n)$  di  $P_n$  pada  $(F_n)$  dengan  $v_p$  sebagai simpul pusat adalah  $v_a - v_p - v_b$ .

**Proposisi 3.** (Syafrizal, Medika, & Yulianti, 2013) Untuk  $n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi graf kipas  $(F_n)$ ,

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ 3; & n \geq 7. \end{cases}$$

**Lemma 2.** (Maulani, Pradini, Setyorini, & Sugeng, 2017) Dalam pewarnaan jari-jari kipas  $(F_n)$ , satu warna hanya bisa dipakai maksimal untuk tiga busur  $v_p v_i, v_p v_{(i+1)}, v_p v_{(i+2)}$  yang berurutan dengan  $v_i v_{(i+1)}$  dan  $v_i v_{(i+2)}$  memiliki warna yang berbeda.

**Proposisi 4.** (Chartrand, Johns, McKeon, & Zhang, 2008) Untuk  $n \geq 3$ , bilangan keterhubungan pelangi dari graf roda  $W_n$  adalah

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1; & n = 3; \\ 2; & 4 \leq n \leq 6; \\ 3; & n \geq 7. \end{cases}$$

**Proposisi 5.** (Syafrizal, Medika, & Yulianti, 2013) Untuk bilangan bulat  $n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf kipas  $F_n$  adalah

$$src(F_n) = \begin{cases} 1; & \text{untuk } n = 2; \\ 2; & \text{untuk } 3 \leq n \leq 6; \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor; & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

**Proposisi 6.** (Chartrand, Johns, McKeon, & Zhang, 2008) Untuk bilangan bulat  $n \geq 3$ , bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf roda  $W_n$  adalah

$$src(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

### 3. Hasil Penelitian

Berikut ini diberikan hasil penelitian dan pembahasan tentang bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona  $P_m \odot P_n$ ,  $F_m \odot P_n$  dan  $W_m \odot P_n$ .

**Teorema 3.1.** *Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf Korona  $P_m \odot P_n$ .*

$$rc(P_m \odot P_n) = (n - 1) + 3, \quad \text{untuk } m \geq 2, n \geq 2.$$

*Bukti.* Perhatikan dua kasus berikut.

**Kasus 1.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $rc(P_m \odot P_n) \geq (n - 1) + 3$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ . Diketahui bahwa graf  $P_m$  adalah graf terhubung sehingga graf  $P_m$  mempunyai bilangan keterhubungan pelangi. Berdasarkan definisi graf korona  $P_m \odot P_n$  terdapat lingkaran  $P_m$  dan  $m -$  salinan graf  $P_n$ , sebut  $P_i^*; i = 1, \dots, m$  dengan  $m \geq 2$ . Simpul-simpul di  $P_i^*$  dinotasikan dengan  $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$  untuk  $i = 1, \dots, m$ . Setiap simpul  $v_{ij}, j = 1, \dots, n$  di  $V(P_i^*)$  bertetangga dengan simpul  $v_1$  di  $V(P_m)$ . Karena  $P_i^*$  graf terhubung maka terdapat simpul  $v_{in}$  di  $V(P_i^*)$  sedemikian sehingga terdapat lintasan  $v_{1j}, v_{1n}$  di  $P_i^*$ . Jelas bahwa,  $v_{1n} \in V(P_i^*)$  bertetangga dengan  $v_1 \in V(P_m)$ . Menurut Proposisi 1,  $P_m$  adalah graf terhubung pelangi sehingga untuk setiap 2 simpul di  $P_m$ , terdapat lintasan pelangi di  $P_m$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $v_i, v_m \in V(P_m)$  dimana  $v_i$  bertetangga dengan simpul-simpul di  $P_i^*$  dan  $v_m$  bertetangga dengan simpul-simpul di  $P_m^*$ .

Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 1.

Menurut Proposisi 1, diperoleh  $rc(P_m) = (n - 1)$  untuk  $m \geq 2$ . Misalkan busur penghubung  $v_i \in V(P_m)$  dengan  $v_{ij}, j = 1, \dots, n$  menggunakan dua warna, yaitu warna 2 (merah) dan 3 (biru). Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 1. Berdasarkan

lintasan  $v_{1j} - v_{mn}$  dengan  $v_{1j} \in V(P_1^*)$  dan  $v_{mn} \in V(P_m^*)$ , terdapat dua kemungkinan:

- (a) jika warna  $v_m v_{mn}$  adalah 3 maka lintasan  $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{mn}$  merupakan lintasan pelangi. Hal ini menyatakan bahwa, panjang lintasan  $v_{1j} - v_{mn}$  adalah  $rc(P_m) + 2 = (n - 1) + 2$ .

(b) jika warna  $v_m v_{mn}$  adalah 2 maka lintasan  $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_{m(n-1)}, v_{mn}$  memiliki panjang lintasan  $v_{1j} - v_{mn}$  adalah  $rc(P_m) + 3 = (n - 1) + 3$ .

Karena untuk setiap lintasan di  $P_m \odot P_n$  terdapat lintasan terhubung pelangi, dengan  $(n - 1) + 3$  warna, maka  $rc(P_m \odot P_n) \geq rc(P_m) + 3$ .

**Kasus 2.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $rc(P_m \odot P_n) \leq (n - 1) + 3$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

• Berdasarkan Proposisi 1, diperoleh  $rc(P_m) = (n - 1)$ .

• Berdasarkan Proposisi 3, diperoleh  $rc(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ 3; & n \geq 7. \end{cases}$

Akan ditunjukkan bahwa  $rc(P_m \odot P_n) \leq (n - 1) + 3$ , untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Perhatikan Gambar 1.

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat:

$P_m \odot P_n$  terbentuk dari graf kipas yang masing-masing pusatnya  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$  saling terhubung dengan graf kipas yang lain membentuk sebuah graf lintasan  $P_m$ .

Misalkan

$v_a, v_b \in V(P_m \odot P_n)$ , maka terdapat 4 kasus untuk mengetahui  $rc(P_m \odot P_n)$ .

• Kasus 1.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_m)$ .

Berdasarkan Proposisi 1, diperoleh  $rc(P_m) = (n - 1)$ .

• Kasus 2.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_i^*); i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Berdasarkan Proposisi 3, karena  $v_a$  merupakan simpul pusat  $v_p$ , diperoleh

$rc(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ 3; & n \geq 7. \end{cases}$

• Kasus 3.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_i^*), i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

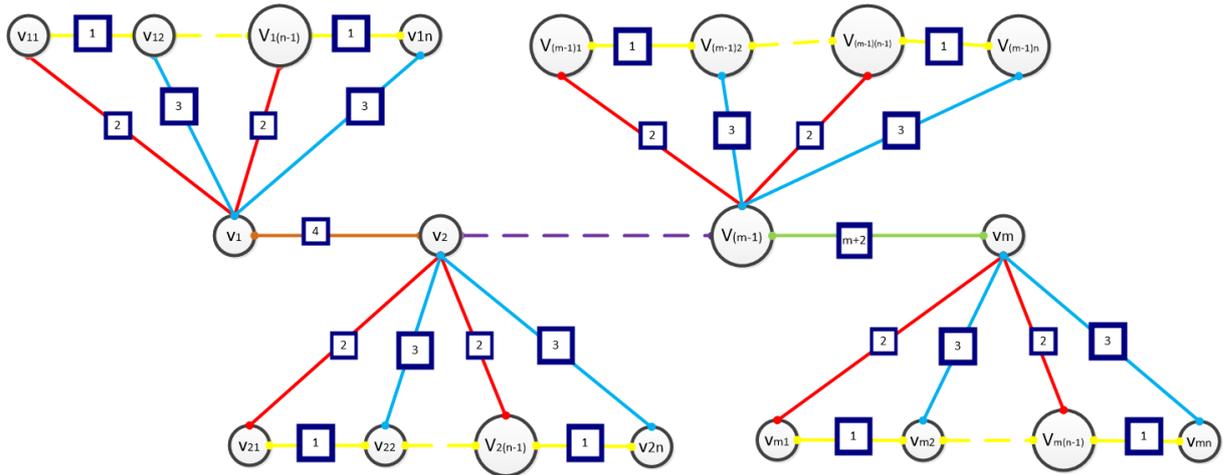
Karena  $v_a$  bukan simpul pusat  $v_p$ , terdapat lintasan  $v_b - v_p - \dots - v_a$ , dimana  $v_a \in V(P_m)$ , sehingga panjang lintasan  $v_b - v_a$  adalah  $(n - 1) + 1$ .

• Kasus 4.  $v_a \in V(P_i^*), v_b \in V(P_j^*), i, j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Berdasarkan definisi graf lintasan, dapat disimpulkan  $P_m \odot P_n$  terbentuk dari graf kipas yang pusatnya  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$  saling terhubung oleh satu lintasan dan membentuk

sebuah lintasan  $P_m$  sehingga graf kipas sebanyak  $m$  tersebut hanya membutuhkan penambahan tiga warna.

Terbukti bahwa panjang lintasan  $v_a v_b$  adalah  $rc(P_m) + 3 = (n - 1) + 3$ .



Gambar 1. Graf Korona  $P_m \odot P_n$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 2, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi untuk Graf korona  $rc(P_m \odot P_n) = (n - 1) + 3$ .

□

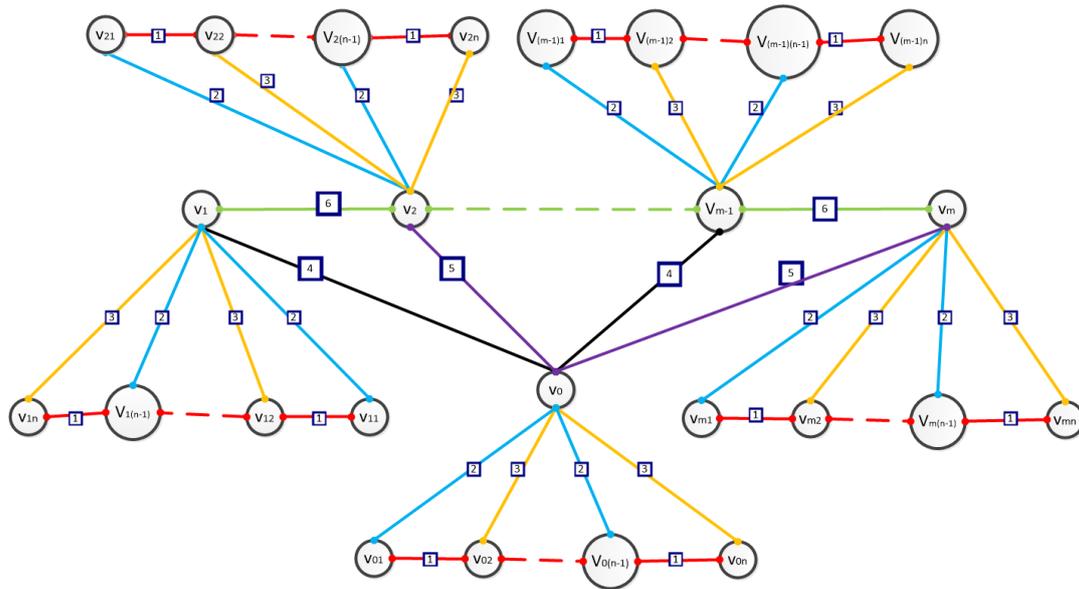
**Teorema 3.2.** *Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf Korona  $F_m \odot P_n$ .*

$$rc(F_m \odot P_n) = rc(F_m) + 3, \quad \text{untuk } m \geq 2, n \geq 2.$$

*Bukti.* Perhatikan dua kasus berikut.

**Kasus 1 dan Kasus 2.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $rc(F_m \odot P_n) = rc(F_m) + 3$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ . Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.1 ( $P_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan bahwa untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 2, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi untuk Graf korona  $rc(F_m \odot P_n) = rc(F_m) + 3 = 6$ .



Gambar 2. Graf Korona  $W_m \odot P_n$

□

**Teorema 3.3.** *Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf Korona  $W_m \odot P_n$ .*

$$rc(W_m \odot P_n) = rc(W_m) + 3, \quad \text{untuk } m \geq 3, n \geq 2.$$

*Bukti.* Perhatikan dua kasus berikut.

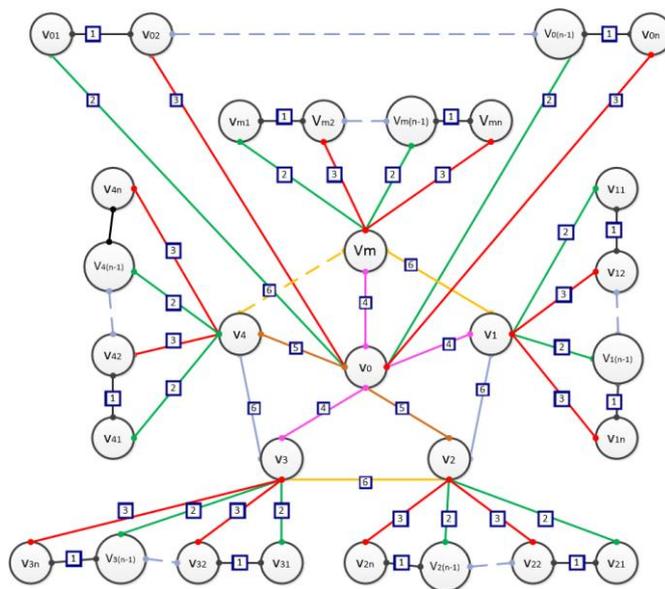
**Kasus 1** dan **Kasus 2.** Untuk  $m \geq 3, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $rc(W_m \odot P_n) = rc(W_m) + 3$  untuk  $m \geq 3, n \geq 2$ .

Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.1 ( $P_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan

bahwa untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 3, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi

untuk Graf korona  $rc(W_m \odot P_n) = rc(W_m) + 3 = 6$ .



Gambar 3. Graf Korona  $W_m \odot P_n$

□

**Teorema 3.4.** Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $P_m \odot P_n$ .

$$src(P_m \odot P_n) = (m - 1) + \binom{n}{3} \cdot (m + 1), \quad \text{untuk } m \geq 2, n \geq 2.$$

*Bukti.* Diketahui bahwa graf  $P_m$  adalah graf terhubung sehingga graf  $P_m$  mempunyai bilangan keterhubungan pelangi kuat. Berdasarkan definisi graf korona  $P_m \odot P_n$  terdapat lintasan  $P_m$  dan  $m -$  salinan graf  $P_n$ , sebut  $P_i^*; i = 1, \dots, m$ . Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $v_i P_i^*$  di  $P_m \odot P_n$  memiliki  $m$  warna berbeda. Asumsikan dengan kontradiksi bahwa ada  $v_i P_i^*$  memiliki warna yang sama. Diketahui  $deg(v_i) = m$ . Ambil sebarang 2 simpul, sebut  $v_{ij}$  dan  $v_{kr}$  dengan  $i < m$ . Kemudian, terdapat lintasan  $v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$ . Misalkan lintasan  $v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$  yaitu  $v_{ij} - v_i = v_k - v_{kr}$ , maka lintasan  $(v_{ij} - v_{kr}) := v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{k(r-1)} - v_{kr}$  sedangkan lintasan geodesik  $(v_{ij} - v_{kr}) := v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$ . Ini menunjukkan bahwa tidak ada lintasan geodesik pelangi  $v_{ij} - v_{kr}$ , sehingga terjadi kontradiksi. Oleh karena itu, untuk setiap  $v_i P_i^*$  di  $P_m \odot P_n$  memiliki  $m$  warna berbeda.

**Kasus 1.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $src(P_m \odot P_n) \geq (n - 1) + \binom{n}{3} \cdot m$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Diketahui bahwa graf  $P_m$  adalah graf terhubung sehingga graf  $P_m$  mempunyai bilangan

keterhubungan pelangi kuat. Berdasarkan definisi graf korona  $P_m \odot P_n$  terdapat lintasan  $P_m$

dan  $m -$  salinan graf  $P_n$ , sebut  $P_i^*; i = 1, \dots, m$  dengan  $m \geq 2$ . Simpul-simpul di  $P_i^*$  dinotasikan dengan  $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$  untuk  $i = 1, \dots, m$ . Setiap simpul  $v_{ij}, j = 1, \dots, n$  di  $V(P_i^*)$  bertetangga dengan simpul  $v_1$  di  $V(P_m)$ . Karena  $P_1^*$  graf terhubung maka terdapat simpul  $v_{in}$  di  $V(P_1^*)$  sedemikian sehingga terdapat lintasan  $v_{1j}, v_{1n}$  di  $P_1^*$ . Jelas bahwa,  $v_{1n} \in V(P_1^*)$  bertetangga dengan  $v_1 \in V(P_m)$ . Menurut Proposisi 1,  $P_m$  adalah graf terhubung pelangi kuat sehingga untuk setiap 2 simpul di  $P_m$ , terdapat lintasan pelangi kuat di  $P_m$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $v_i, v_m \in V(P_m)$  dimana  $v_i$  bertetangga dengan simpul-simpul di  $P_i^*$  dan  $v_m$  bertetangga dengan simpul-simpul di  $P_m^*$ .

Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 4.

Karena untuk setiap  $P_i^*; i = 1, \dots, m$  terhubung ke  $v_i \in V(P_m)$  memiliki warna berbeda, sehingga  $v_i v_{in} = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m$ . Menurut Proposisi 1, diperoleh  $rc(P_m) = (n - 1)$  untuk  $m \geq 2$ . Misalkan busur penghubung  $v_i \in V(P_m)$  dengan  $v_{ij}, j = 1, \dots, n$  menggunakan  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m$  warna. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 4. Berdasarkan lintasan  $v_{1j} - v_{mn}$  dengan  $v_{1j} \in V(P_1^*)$  dan  $v_{mn} \in V(P_m^*)$ , jika warna  $v_m v_{mn}$  adalah  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m$  maka lintasan  $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{mn}$  merupakan lintasan pelangi kuat. Hal ini menyatakan bahwa, panjang lintasan  $v_{1j} - v_{mn}$  adalah  $src(P_m) + (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m) = (n - 1) + (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m)$ . Karena untuk setiap lintasan di  $P_m \odot P_n$  terdapat lintasan terhubung pelangi kuat, maka  $src(P_m \odot P_n) \geq (n - 1) + (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m)$ .

**Kasus 2.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $src(P_m \odot P_n) \leq (n - 1) + (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot m)$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

• Berdasarkan Proposisi 1, diperoleh  $src(P_m) = (n - 1)$ .

• Berdasarkan Proposisi 3, diperoleh  $src(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & n \geq 7. \end{cases}$

- Akan ditunjukkan bahwa  $src(P_m \odot P_n) \leq (n - 1) + \left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \cdot m\right)$ , untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Perhatikan Gambar 4.

Berdasarkan Gambar 4 dapat dilihat:

$P_m \odot P_n$  terbentuk dari graf kipas yang masing-masing pusatnya  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$  saling terhubung dengan graf kipas yang lain membentuk sebuah graf lintasan  $P_m$ .

Misalkan

$v_a, v_b \in V(P_m \odot P_n)$ , maka terdapat 4 kasus untuk mengetahui  $src(P_m \odot P_n)$ .

- Kasus 1.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_m)$ .

Berdasarkan Proposisi 1, diperoleh  $src(P_m) = (n - 1)$ .

- Kasus 2.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_i^*); i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Berdasarkan Proposisi 3, karena  $v_a$  merupakan simpul pusat  $v_p$ , diperoleh

$$rc(Fn) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ 3; & n \geq 7. \end{cases}$$

- Kasus 3.  $v_a \in V(P_m), v_b \in V(P_i^*), i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Karena  $v_a$  bukan simpul pusat  $v_p$ , terdapat lintasan  $v_b - v_p - \dots - v_a$ , dimana  $v_a \in V(P_m)$ , sehingga panjang lintasan  $v_b - v_a$  adalah  $(n - 1) + 1$ .

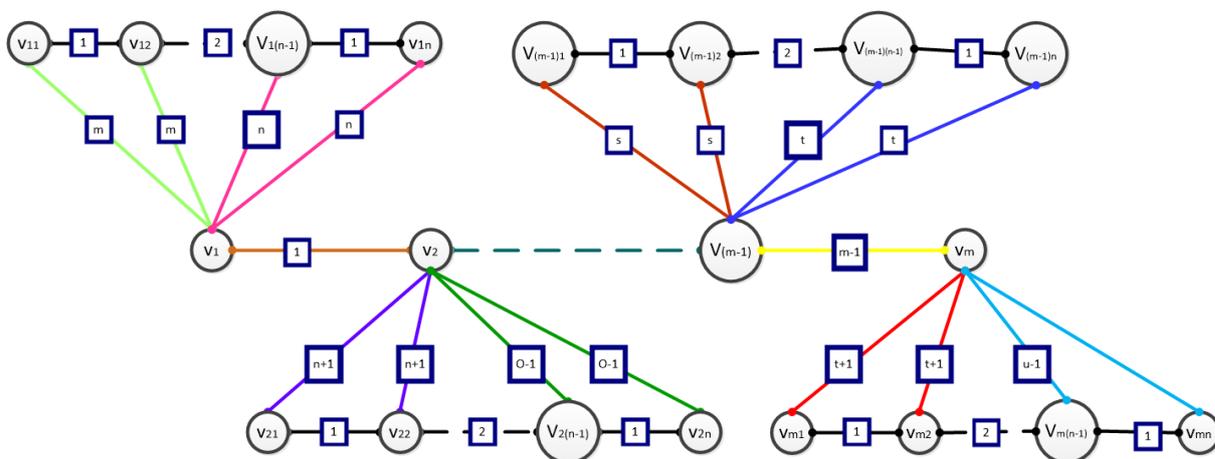
- Kasus 4.  $v_a \in V(P_i^*), v_b \in V(P_j^*), i, j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Pandang dua buah graf kipas misalnya dengan pusat  $v_1$  dan  $v_2$  saling terhubung, karena dua buah graf tersebut terhubung, maka terdapat satu sisi yang menghubungkan kedua pusat  $v_1$  dan  $v_2$  kipas tersebut sehingga lintasan geodesiknya 3.

$Src$  merupakan sebuah keterhubungan pelangi yang mengharuskan jumlah warna dalam sisi-sisi yang digunakan lintasan rainbow sesuai dengan lintasan geodesiknya. Hal ini menyebabkan masing-masing graf kipas harus memiliki warna yang berbeda.

Berdasarkan

Lemma 2, dengan cara pewarnaan yang sama yaitu 1 warna hanya dapat digunakan sebanyak tiga kali.



Gambar 4. Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $P_m \odot P_n$

Perhatikan Gambar 4, warna pada jari-jari  $P_1^* \neq P_i^* \neq P_m^*$ , dengan penambahan satu warna untuk sisi yang menghubungkan tiap  $F_n$  diperoleh  $src(P_m \odot P_n) \leq (n - 1) + \binom{n}{3} \cdot m$ .

Terbukti bahwa panjang lintasan  $v_a v_b$  adalah  $src(P_m) + \binom{n}{3} \cdot m = (n - 1) + \binom{n}{3} \cdot m$ .

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 2, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi kuat untuk Graf korona  $src(P_m \odot P_n) = (n - 1) + \binom{n}{3} \cdot m$ .

□

**Teorema 3.5.** *Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $F_m \odot P_n$ .*

$$src(F_m \odot P_n) = \binom{n}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1), \quad \text{untuk } m \geq 2, n \geq 2.$$

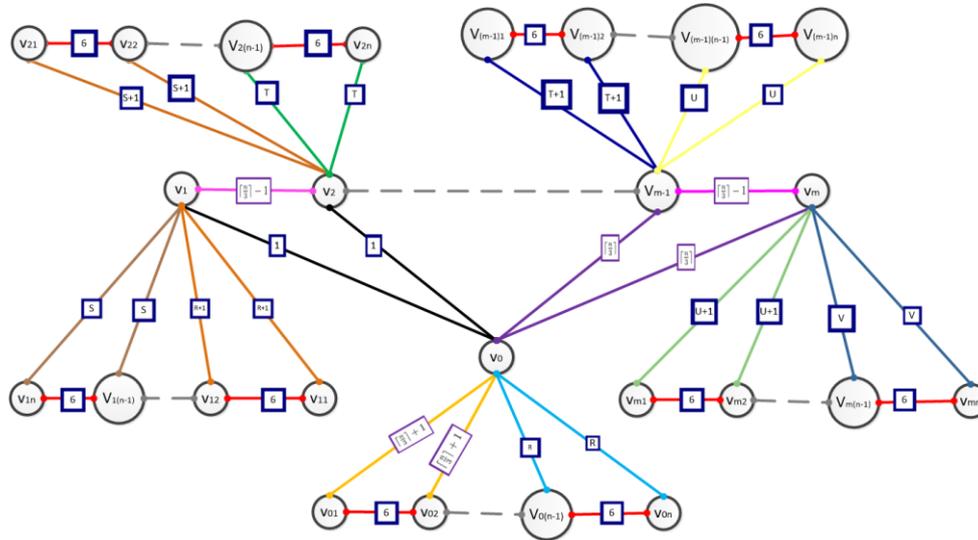
*Bukti.* Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.4 ( $P_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap  $v_i P_i^*$  di  $F_m \odot P_n$  memiliki  $(k + 1)$  warna berbeda.

**Kasus 1 dan Kasus 2.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $src(F_m \odot P_n) = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1)$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.4 ( $P_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan

bahwa untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 2, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi kuat untuk Graf korona  $src(F_m \odot P_n) = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1)$ .



Gambar 5. Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $F_m \odot P_n$

□

**Teorema 3.6.** Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $W_m \odot P_n$ .

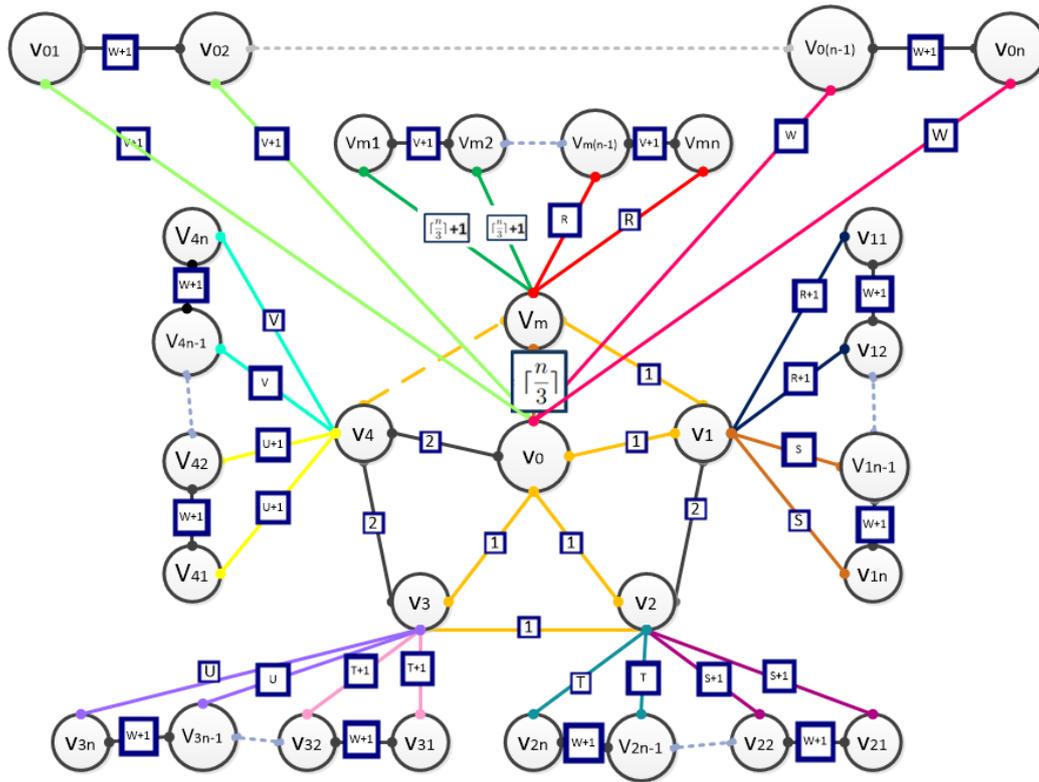
$$src(W_m \odot P_n) = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1), \quad \text{untuk } m \geq 2, n \geq 2.$$

*Bukti.* Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.4 ( $P_m \odot P_n$ ) dan Teorema 3.5 ( $F_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap  $v_i P_i^*$  di  $W_m \odot P_n$  memiliki  $(k + 1)$  warna berbeda.

**Kasus 1 dan Kasus 2.** Untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $src(W_m \odot P_n) = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1)$  untuk  $m \geq 2, n \geq 2$ .

Dengan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.4 ( $P_m \odot P_n$ ) dan Teorema 3.5 ( $F_m \odot P_n$ ), dapat ditunjukkan bahwa untuk bilangan bulat  $m, n$  dengan  $m \geq 2, n \geq 2$ , bilangan keterhubungan pelangi kuat untuk Graf korona  $src(W_m \odot P_n) = \binom{m}{3} + \binom{n}{3} \cdot (m + 1)$ .



Gambar 6. Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona  $W_m \odot P_n$

□

## Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Bilangan keterhubungan pelangi graf korona  $P_m \odot P_n$ ,  $F_m \odot P_n$ , dan  $W_m \odot P_n$  sebagai berikut:

$$rc(G \odot P_n) = rc(G) + 3, \quad \text{untuk } m \geq 3, n \geq 2.$$

dimana  $G$  adalah graf  $P_m, F_m$  dan  $W_m$ .

2. Bilangan keterhubungan pelangi kuat graf korona  $P_m \odot P_n$ ,  $F_m \odot P_n$ , dan  $W_m \odot P_n$  sebagai berikut:

$$src(G \odot P_n) = src(G) + \left(\binom{n}{3} \cdot (m + 1)\right), \quad \text{untuk } m \geq 3, n \geq 2.$$

dimana  $G$  adalah graf  $P_m, F_m$  dan  $W_m$ .

## Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya menentukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona  $P_m \odot P_n$ ,  $F_m \odot P_n$ , dan  $W_m \odot P_n$  dalam bentuk umum  $rc(G \odot P_n)$  dan  $src(G \odot P_n)$ . Diharapkan juga para peneliti selanjutnya

bisa menemukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona dalam bentuk umum  $rc(G \odot H)$  dan  $src(G \odot H)$  dimana  $G$  dan  $H$

adalah graf terhubung.

## Daftar Pustaka

- Bondy, A., Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. Springer.
- Chartrand, G., Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs. Third Edition*. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton. London. New York. Washington, D.C .
- Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133, 85-98.
- Diestel, R. (2010). *Graph Theory. 4th Electronic Edition*. Springer.
- Estetikasari, D., Syafrizal, Sy. (2013). On the Rainbow Connection for Some Corona Graphs. *Appl. Math. Sci*, 7, 4975 - 4980.
- Gallian, J.A. (2014). A Dynamic Survey of Graph Labelling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17.
- Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley.
- Kaladevi, V., Kavitha, G. (2012). Edge-odd graceful labeling of some corona graphs. *Proceedings of ICMEB*, 8, 276.
- Li, X., Sun, Y. (2012). *Rainbow Connections of Graphs*. Springer.
- Maulani, A., Pradini, S.F.Y.O., Setyorini, D., Sugeng, K. A. (2017). *Rainbow Connection Number of  $C_m J P_n$  and  $C_m J C_n$* . Paper telah dipresentasikan pada ICGTIS tanggal 9 Agustus 2017 dan ICREM tanggal 11 Agustus 2017, Universitas Indonesia.
- Sugeng, K. A., Slamet, S., Silaban, Riama, D. (2014). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen Matematika, FMIPA UI.
- Syafrizal, Sy., Medika, G.H., Yulianti, L. (2013). The rainbow connection of fan and sun. *Appl. Math. Sci*, 7, 3155-3160.