P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

HIMPUNAN CANTOR $\frac{1}{2m-1}$ YANG DIPERUMUM

Khairunnisa Fadhilla Ramdhania[1)*], Pilipus Neri Agustima[2)]

[1*]Prodi Teknik Informatika Universitas Bhayangkara Jakarta Raya
Email: khairunnisa.fadhilla@dsn.ubharajaya.ac.id
[2]Yayasan Pendidikan dan Pelatihan Pahoa
Email: pilipus.neri.agustima@sekolah.pahoa.sch.id

ABSTRACT

The Cantor set was discovered in 1874 by Henry John Stephen Smith and introduced Georg Cantor in 1883. The Cantor set is a set of intersection of closed intervals that has unique properties. In this paper, it will shown the Cantor middle $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ *sets. After that, the Cantor middle* $\frac{1}{2m-1}$ *set will be constructed and examined how many closed intervals, length of each closed interval, total length of the closed intervals which remained in every step of the construction of the Cantor set, and total length of the segments removed from the Cantor set. So, it will proved that the Cantor middle* $\frac{1}{2m-1}$ *set is a Cantor set as defined bellow, where* $2 \leq m < \infty$*. In another way, some properties will be discovered in this paper, i.e compact set, totally disconnected, nowhere dense, and uncountable set.*

Keywords: *set, Cantor set, totally disconnected set, compact set.*

ABSTRAK

Himpunan Cantor ditemukan oleh Henry John Stephen Smith pada tahun 1874 dan diperkenalkan oleh George Cantor pada tahun 1883. Himpunan Cantor merupakan himpunan dari irisan semua interval tutup yang memiliki sifat-sifat yang khusus. Dalam tulisan ini, akan diperlihatkan bentuk himpunan Cantor $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$. Kemudian, akan dibuktikan bahwa himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$, dengan $2 \leq m < \infty$, yang diperumum merupakan himpunan Cantor, dengan mengonstruksi dan menunjukkan bahwa himpunan ini memenuhi definisi himpunan Cantor, yaitu dengan mencari berapa banyak dan panjang setiap himpunan tutup yang termuat, dan panjang total dari interval tutup yang tersisa dalam setiap langkah proses konstruksi, serta panjang total dari partisi yang dibuang dari himpunan tersebut. Selain itu, akan ditunjukkan pula himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ yang diperumum memiliki sifat khusus, yakni merupakan himpunan kompak, takterhubung total, tidak padat dimana-mana, dan takterhitung.

Kata kunci: himpunan, himpunan Cantor, himpunan takterhubung total, himpunan kompak.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

1. PENDAHULUAN

Himpunan Cantor ditemukan oleh Henry John Stephen Smith pada tahun 1874 dan diperkenalkan oleh George Cantor pada tahun 1883. Henry mengembangkan teori tentang himpunan, sehingga menjadi teori yang sangat penting dalam matematika. Cantor membuktikan bahwa bilangan real lebih banyak dibandingkan bilangan asli. Faktanya, metode yang Cantor gunakan dalam pembuktian teorema ini mengakibatkan adanya perbedaan tingkatan ketertakhinggaan.

Himpunan Cantor merupakan himpunan dari irisan semua interval tutup yang memiliki sifat-sifat yang khusus. Kini, himpunan Cantor bahkan sering digunakan sebagai contoh penyangkal. Cantor menemukan Himpunan Cantor $\frac{1}{3}$. Selanjutnya, akan diperlihatkan Himpunan Cantor $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$. Secara umum, akan ditunjukkan himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ merupakan himpunan Cantor yang telah telah didefinisikan, dengan $2 \leq m < \infty$.

2. KONSTRUKSI HIMPUNAN CANTOR YANG DIPERUMUM

Sebelum mengonstruksi himpunan Cantor yang diperumum, akan diperlihatkan sebuah definisi dan teorema penunjang terkait himpunan Cantor. Kemudian, akan diperlihatkan juga bagaimana George Cantor mengonstruksi himpunan Cantor $\frac{1}{3}$ atau yang biasa dikenal dengan himpunan Cantor, dan akan dikaji beberapa sifat yang dimiliki untuk mengonstruksi himpunan Cantor $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{7}$, yang selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan tersebut memiliki properti yang sama seperti himpunan Cantor. Hal tersebut berguna untuk membuat definisi himpunan Cantor yang diperumum dengan cara yang sama seperti yang telah dilakukan oleh George Cantor pada saat mengonstruksi himpunan Cantor.

Definisi 1 (Davis, 2005) *Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ himpunan tak kosong. Titik x disebut titik akumulasi dari A jika $\exists \varepsilon > 0 \ \ni N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.*

Teorema 2 (Davis, 2005) *Jika $A_1, A_2, \ldots$ merupakan himpunan tutup, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah himpunan tutup.*

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

2.1. Konstruksi Himpunan Cantor $\frac{1}{3}$

Pertama, pandang interval $[0, 1]$ dan notasikan sebagai C_0. Selanjutnya, bagi C_0 menjadi tiga bagian yang sama besar dan hapus bagian tengah, yakni interval buka $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Notasikan himpunan tersebut sebagai C_1, yaitu himpunan $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Kemudian, lakukan hal yang sama, yaitu membagi kedua interval tersebut menjadi tiga bagian yang sama besar dan hapus bagian tengah dari tiap interval pada C_1, sehingga akan diperoleh C_2, yaitu $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ (Khan & Islam, 2013).

Lebih jauh, akan didapatkan

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

Setelah n iterasi, diperoleh

$$C_n = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{3^n - 3}{3^n}, \frac{3^n - 2}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, 1\right],$$

dengan $n \geq 0$. Himpunan Cantor $\frac{1}{3}$ yaitu

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Banyaknya himpunan tutup yang termuat pada C_n adalah 2^n, dengan $n \geq 0$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa total panjang interval yang dihapus adalah 1. Ingat bahwa panjang interval yang dihapus pada iterasi pertama adalah $\frac{1}{3}$, sedangkan pada iterasi kedua total panjang interval yang dihapus adalah $\frac{2}{9}$, dan pada iterasi ketiga adala $\frac{4}{27}$, dan seterusnya. Berdasarkan hal tersebut, dapat dilihat bahwa $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$ merupakan barisan geometri dengan $a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{2}{3}$, dan jumlah dari barisan ini adalah $S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$ Panjang dari tiap-tiap interval tutup pada C_n adalah $\frac{1}{3^n}$ dan total panjang dari interval-interval pada C_n adalah $\frac{2^n}{3^n}$.

2.2. Konstruksi Himpunan Cantor $\frac{1}{5}$

Pandang interval $[0, 1]$ dan notasikan sebagai C_0. Selanjutnya, bagi C_0 menjadi lima bagian yang sama besar dan hapus interval buka bagian tengah , yakni interval $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ dan

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. Notasikan himpunan tersebut sebagai C_1, yaitu himpunan $\left[0,\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{4}{5},1\right]$. Kemudian, lakukan hal yang sama, yaitu membagi ketiga interval tersebut menjadi lima bagian yang sama besar dan hapus bagian tengah dari tiap interval pada C_1, sehingga akan diperoleh C_2,

$$C_2=\left[0,\frac{1}{25}\right]\cup\left[\frac{2}{25},\frac{3}{25}\right]\cup\left[\frac{4}{25},\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{5},\frac{11}{25}\right]\cup\left[\frac{12}{25},\frac{13}{25}\right]\cup\left[\frac{14}{25},\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{4}{5},\frac{21}{25}\right]\cup\left[\frac{22}{25},\frac{23}{25}\right]\cup\left[\frac{24}{25},1\right].$$

Setelah n iterasi, diperoleh

$$C_n=\left[0,\frac{1}{5^n}\right]\cup\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5^n}\right]\cup\ldots\cup\left[\frac{5^n-3}{5^n},\frac{5^n-2}{5^n}\right]\cup\left[\frac{5^n-1}{5^n},1\right]$$

dengan $n\geq 0$. Himpunan Cantor $\frac{1}{5}$ yaitu

$$C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n.$$

Banyaknya himpunan tutup yang termuat pada C_n adalah 3^n, dengan $n\geq 0$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa total panjang interval yang dihapus adalah 1. Ingat bahwa panjang interval yang dihapus pada iterasi pertama adalah $\frac{2}{5}$, sedangkan pada iterasi kedua total panjang interval yang dihapus adalah $\frac{6}{25}$, dan seterusnya, bilangan-bilangan ini membentuk suatu barisan geometri dengan $a=\frac{2}{5}$, $r=\frac{3}{5}$, dan jumlah dari barisan ini adalah $S_\infty=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{5}}=1$. Panjang dari tiap-tiap interval tutup pada C_n adalah $\frac{1}{5^n}$ dan total panjang dari interval-interval pada C_n adalah $\frac{3^n}{5^n}$.

Dengan cara serupa, dapat ditunjukkan bahwa himpunan Cantor $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{7}$ memiliki properti yang sama, yaitu tertutup dan terbatas, tidak memuat interval, dan setiap titik pada himpunan Cantor $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{7}$ merupakan titik akumulasi dari himpunan tersebut.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu himpunan dapat didefinisikan sebagai himpunan Cantor dengan dikonstruksi dengan cara yang sama dan menggunakan properti-properti yang telah dimiliki.

Definisi 3 (M.J Islam, 2011) *Misal C himpunan tak kosong. C disebut himpunan Cantor jika*

i) C *tertutup dan terbatas,*

StatMat Jurnal Statistika dan Matematika
P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

ii) $\mathcal{C}$ *tidak memuat interval, dan*

iii) *Setiap titik di* $\mathcal{C}$ *merupakan titik akumulasi* $\mathcal{C}$.

3.1. Himpunan Cantor yang Diperumum

Pada bagian ini, himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ yang diperumum akan dikonstruksi, dengan $2 \leq m < \infty$, dan akan diperlihatkan bahwa himpunan ini merupakan himpunan Cantor seperti yang didefinisikan pada Definisi 3

Pertama, himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ akan dikonstruksi dengan cara serupa seperti saat mengonstruksi himpunan Cantor $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, dan $\frac{1}{7}$, berikut langkah-langkahnya:

Pandang interval tutup $[0, 1]$ dan beri nama $\mathcal{C}_0$. Selanjutnya, bagi $\mathcal{C}_0$ menjadi $2m-1$ bagian dan hapus bagian tengah, yakni interval buka $\left(\frac{1}{2m-1}, \frac{2}{2m-1}\right), \left(\frac{3}{2m-1}, \frac{4}{2m-1}\right), \dots \left(\frac{2m-3}{2m-1}, \frac{2m-2}{2m-1}\right)$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{2m-1}\right] \cup \left[\frac{2}{2m-1}, \frac{3}{2m-1}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2m-4}{2m-1}, \frac{2m-3}{2m-1}\right] \cup \left[\frac{2m-2}{2m-1}, 1\right]$$

atau dapat ditulis

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{2m-1}\right] \cup \left[\frac{2}{2m-1}, \frac{3}{2m-1}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{(2m-1)-3}{2m-1}, \frac{(2m-1)-2}{2m-1}\right] \cup \left[\frac{(2m-1)-1}{2m-1}, 1\right].$$

Untuk memperoleh $\mathcal{C}_2$, bagi setiap interval tutup yang ada di $\mathcal{C}_1$ menjadi $2m-1$ bagian dan hapus interval buka bagian tengah pada urutan ke $2k$, dengan $k < m$, sehingga didapat

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{(2m-1)^2}\right] \cup \left[\frac{2}{(2m-1)^2}, \frac{3}{(2m-1)^2}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{(2m-1)^2-3}{(2m-1)^2}, \frac{(2m-1)^2-2}{(2m-1)^2}\right] \cup \left[\frac{(2m-1)^2-1}{(2m-1)^2}, 1\right].$$

Setelah n iterasi, diperoleh

$$\mathcal{C}_n = \left[0, \frac{1}{(2m-1)^n}\right] \cup \left[\frac{2}{(2m-1)^n}, \frac{3}{(2m-1)^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{(2m-1)^n-3}{(2m-1)^n}, \frac{(2m-1)^n-2}{(2m-1)^n}\right] \cup \left[\frac{(2m-1)^n-1}{(2m-1)^n}, 1\right],$$

dengan $n \geq 0$ dan $m \geq 2$. Himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ adalah himpunan $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$.

Lemma 4 *Jika* $\mathcal{C}_n$ *terdefinisi pada himpunan Cantor* $\frac{1}{2m-1}$, $2 \leq m < \infty$, *maka terdapat* m^n *interval tutup pada* $\mathcal{C}_n$, *panjang setiap interval tutup adalah* $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^n$, *dengan* $2 \leq m < \infty$, *panjang total dari interval yang dihapus adalah* 1. *Panjang total dari semua interval yang termuat pada* $\mathcal{C}_n$ *adalah* $\left(\frac{m}{2m-1}\right)^n$, *dengan* $2 \leq m < \infty$, *yang mendekati 0 seiring nilai* n *yang membesar menuju takhingga.*

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

Bukti Lemma 4:

(Dengan menggunakan induksi matematika)

Seperti yang telah dikonstruksi di atas, pada konstruksi C_1 telah diketahui bahwa C_1 memuat m interval tutup dan tiap interval memiliki panjang $\frac{1}{2m-1}$, sehingga panjang total interval-interval pada C_1 adalah $\frac{m}{2m-1}$. Misalkan benar untuk setiap $n = k$. Maka terdapat m^k interval tutup pada C_k. Panjang tiap interval $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^k$, sehingga panjang total interval-interval pada C_k adalah $\left(\frac{m}{2m-1}\right)^k$. Selanjutnya, akan ditunjukkan terdapat m^{k+1} interval tutup pada C_{k+1}, dengan panjang $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{k+1}$ dan panjang total semua interval $\left(\frac{m}{2m-1}\right)^{k+1}$, untuk $2 \leq m < \infty$. Catat bahwa setiap $\frac{1}{2m-1}$ bagian tengah dihapus dari sebuah interval tutup artinya sama dengan membagi interval menjadi sebanyak m interval tutup. Langkah pertama adalah dengan mengalikan banyaknya interval pada C_k dengan m, sehingga terdapat $m(m^k) = m^{k+1}$ interval tutup pada C_{k+1}. Untuk membentuk C_{k+1}, bagi setiap interval pada C_k yang memiliki panjang $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^k$ menjadi $2m-1$ interval. Akibatnya, panjang interval $C_{k+1}C_{k+1}$ adalah

$$\frac{\left(\frac{1}{2m-1}\right)^k}{(2m-1)} = \left(\frac{1}{2m-1}\right)^{k+1}$$

dan panjang totalnya adalah

$$m^{k+1}\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{k+1} = \left(\frac{m}{2m-1}\right)^{k+1}.$$

Langkah selanjutnya adalah dengan menunjukkan total panjang interval yang telah dibuang adalah 1. Ingat bahwa pada iterasi pertama, interval dengan total panjang $\frac{m-1}{2m-1}$ dihapus, pada iterasi kedua, interval dengan total panjang $\frac{m^2-m}{(2m-1)^2}$ dihapus, sedangkan pada iterasi ketiga total panjang interval yang dihapus adalah $\frac{m^3-m^2}{(2m-1)^3}$, dan seterusnya, sehingga membentuk suatu deret geometri dengan $a = \frac{m-1}{2m-1}$, $r = \frac{m}{2m-1}$ dan jumlah total deret ini adalah $S_\infty = \frac{\frac{m-1}{2m-1}}{1-\frac{m}{2m-1}} = 1$. Akibatnya, total panjang interval yang ada pada C_n mendekati 0, seiring membesarnya n.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

Proposisi 5 *Himpunan Cantor* $\frac{1}{2m-1}$ *merupakan himpunan Cantor, dengan* $2 \leq m < \infty$.

Bukti:

Misalkan C adalah himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ dengan $2 \leq m < \infty$. Karena 1 selalu termuat dalam C_n, maka $C \neq \emptyset$. Harus ditunjukkan bahwa himpunan ini memenuhi definisi himpunan Cantor yang diperumum.

a. Misalkan $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Karena C_n merupakan himpunan tutup untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka irisan semua C_n adalah himpunan tutup, sehingga C tutup. Karena $C \subseteq [0,1]$, maka C terbatas.

b. Asumsikan bahwa C memuat sebuah interval buka (x, y) dengan panjang $|y - x|$ untuk $y > x$. Hal tersebut berarti bahwa di setiap bagian proses konstruksi (x, y) harus termuat disalah satu interval tutup yang tersisa. Berdasarkan Lemma 2.4, setelah n tahapan, panjang dari masing-masing interval tutup pada C_n adalah $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^n$, dengan $2 \leq m \leq \infty$. Berdasarkan Teorema Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{n_0} = \frac{1}{(2m-1)^{n_0}} < |y - x|$, artinya terdapat beberapa titik pada (x, y) yang tidak termuat disalah satu interval tutup yang tersisa, yakni C_{n_0}. Kontradiksi. Dengan demikian, C tidak memuat interval satu pun.

c. Akan dibuktikan bahwa setiap titik pada C merupakan titik akumulasi C, yaitu dengan menunjukkan bahwa setiap $x \in C$ dan setiap $r > 0$, terdapat titik y di $(x - r, x + r)$ sedemikian sehingga $y \neq x$ dan $y \in C$. Ambil $x \in C$, maka $x \in C_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga x pasti termuat disalah satu interval tutup C_n. Katakan bahwa $x \in [a, b]$, dengan $[a, b]$ suatu n interval di C_n yang memiliki panjang $\left(\frac{1}{2m-1}\right)^n = \frac{1}{(2m-1)^n}$.

Akibatnya,

$$x - a \leq \frac{1}{(2m-1)^n} \text{ dan } b - x \leq \frac{1}{(2m-1)^n},$$

sehingga

$$x - \frac{1}{(2m-1)^n} \leq a \text{ and } b \leq x + \frac{1}{(2m-1)^n}.$$

Berdasarkan Teorema Archimedes, $\exists N \in \mathbb{N}, \ni \frac{1}{(2m-1)^N} < r$ dan dapat ditulis sebagai berikut

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

$$x < x + \frac{1}{(2m-1)^n} < x + \frac{1}{(2m-1)^N} < x + r$$

dan

$$x > x - \frac{1}{(2m-1)^n} > x - \frac{1}{(2m-1)^N} > x - r,$$

untuk setiap $n > N$. Dengan demikian,

$$x - r < x - \frac{1}{(2m-1)^n} \leq a \leq x \leq b \leq x + \frac{1}{(2m-1)^n} < x + r,$$

Artinya a dan b termuat di $(x - r, x + r)$ dan salah satunya tidak sama dengan x.

Oleh karena itu, Himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ merupakan himpunan Cantor.

3.2. Sifat-sifat Himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$

Berdasarkan Definisi 3, Himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$ (yang kemudian akan disebut himpunan Cantor dan dinotasikan sebagai C) bersifat tertutup dan terbatas, C tidak memuat interval, dan setiap titik di C merupakan titik akumulasi bagi C. Selanjutnya, akan diperlihatkan dan dibuktikan sifat-sifat lain dari C.

a. C kompak.

Karena $C \subseteq \mathbb{R}$ bersifat tertutup dan terbatas, maka berdasarkan Teorema Heinne-Borel C kompak.

b. C takterhubung total

$C \subseteq \mathbb{R}$ dan merupakan subset terhubung dari $\mathbb{R}$, yang merupakan interval dan himpunan singleton. Karena C tidak memuat interval, maka satu-satunya subset terhubung di C adalah himpunan singleton. Dengan demikian, C takterhubung total.

c. C tidak padat dimana-mana

Bukti:

Pertama, harus ditunjukkan bahwa $int(\overline{C}) = \emptyset$. Karena C memuat semua titik akumulasi dari C, maka $int(C) = int(\overline{C})$. Andaikan $int(C) = \emptyset$, $\exists x \in int(C)$ maka $\exists \varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(x, \varepsilon) \subseteq C$. $B(x, \varepsilon)$ merupakan sebuah interval di C, akan tetapi C tidak memuat interval. Kontradiksi.

d. C merupakan himpunan takterhitung.

Bukti:

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika), Vol. 2, No. 2, Juli 2020
Halaman: 167-175
@Prodi S-1 Matematika FMIPA Unpam

Andaikan C terhitung. Berdasarkan definisi Keterhitungan, terdapat $f: \mathbb{N} \rightarrow$ C yang bersifat 1-1 dan pada. Misal C$= \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ dan $f(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dengan

$$x_1 = 0.c_{11}c_{12}c_{13} \dots$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0.c_{n1}c_{n2}c_{n3} \dots$$
$$\vdots$$

dan $c_{nm} \in \{0,2,4, \dots, 2m, 2m-2\}$. Kemudian, definisikan $c = 0.c_1c_2c_3 \dots$ dengan $c_n \neq c_{nn}$. Jelas bahwa $c \in$ C, tetapi $c \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Kontradiksi.

4. SIMPULAN

Himpunan Cantor yang diperumum, yakni himpunan Cantor $\frac{1}{2m-1}$, dengan $2 \leq m < \infty$ memenuhi definisi Himpunan Cantor dan beberapa sifat lainnya yaitu kompak, takterhubung total, tidak padat dimana-mana, dan merupakan himpunan takterhitung.

5. DAFTAR PUSTAKA

Davis, T. M. (2005). *Topology*. Singapore: Mc Graw Hill.

Khan, M. S., & Islam, M. S. (2013). An Exploration of Generalized Cantor Set. *International Journal of Scientific & Technology Research, 6*(7), 50.

M.J Islam, M. I. (2011). Generalized Cantor Set and Its Fractal Dimension. *Journal Scientific and Industrial Research*, 499-506.