

TIKZ DARI MATRIKS SIMETRI $Br_3 \odot P_3$

¹Alfi Maulani, ²Hendro Waryanto

^{1,2}Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pamulang
E-mail: dosen02330@unpam.ac.id

ABSTRACT

The concept of adjacency in the case of adjacency matrix and the coloring of undirected connected graphs is closely related to the corona operation of two different undirected connected graphs. The two graphs are diamond graphs that are subjected to corona operation with path graphs where each side or arc of the corona operation of the two graphs has different colors which are denoted as $src(Br_3 \odot P_3)$. Several possible adjacency matrices of $src(Br_3 \odot P_3)$ can be symmetrical matrices or skew symmetrical matrices or non-symmetrical matrices whose results really depend on the elements that fill the matrix in the form of a square or square matrix based on the neighboring values of each vertex/point of the $src(Br_3 \odot P_3)$ graph. The most appropriate method used to solve this problem which is rarely applied by other researchers is applying the Tikz software to determine the matrix form of $src(Br_3 \odot P_3)$ which contains the rainbow connected numbers on each side or arc. The results that the researchers obtained with the help of the Tikz operation using the trial and error method and relying on literature studies from various sources show that the adjacency matrix of the graph $src(Br_3 \odot P_3)$ has a symmetrical matrix shape and the elements of each main diagonal are all zero.

Keywords : Tikz, adjacency matrix, $src(Br_3 \odot P_3)$

ABSTRAK

Konsep ketetangaan pada kasus *adjacency matrix* dan pewarnaan graf terhubung yang tak berarah erat kaitannya dengan operasi korona dari dua buah graf terhubung tak berarah yang berbeda. Kedua graf tersebut adalah graf berlian yang dikenakan operasi korona dengan graf lintasan dimana setiap sisi atau busur dari operasi korona kedua graf tersebut memiliki warna-warna berbeda yang dinotasikan sebagai $src(Br_3 \odot P_3)$. Beberapa kemungkinan *adjacency matrix* dari $src(Br_3 \odot P_3)$ dapat berupa matriks simetri atau matriks *skew* simetri atau matriks *non* simetri yang hasilnya sangatlah bergantung dari elemen-elemen yang mengisi matriks berbentuk bujur sangkar atau matriks persegi berdasarkan nilai ketetangaan setiap simpul/titik dari graf $src(Br_3 \odot P_3)$ tersebut. Metode yang paling tepat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut yang jarang sekali diaplikasikan oleh peneliti lain yaitu mengaplikasikan software *Tikz* guna menentukan bentuk matriks dari $src(Br_3 \odot P_3)$ yang memuat bilangan keterhubungan pelangi di setiap sisi atau busurnya. Hasil yang peneliti peroleh dengan bantuan pengoperasian *Tikz* dengan metode *trial and error* serta mengandalkan studi literatur dari berbagai sumber menunjukkan bahwa *adjacency matrix* dari graf $src(Br_3 \odot P_3)$ memiliki bentuk matriks yang simetri dan elemen setiap diagonal utamanya bernilai nol semua.

Kata Kunci: Tikz, adjacency matrix, $src(Br_3 \odot P_3)$

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu materi di bidang ilmu matematika dan informatika. Salah satu materi teori graf yang dapat diselesaikan dengan *software* pengolah dokumen *Latex* yakni *Tikz* adalah *adjacency matrix* dan pewarnaan graf. Materi *adjacency matrix* sendiri sering ditemukan di mata kuliah yang lain seperti aljabar linear yang sering dipelajari orang-orang Teknik dan mata kuliah matematika ekonomi yang sering dipelajari orang-orang ekonomi. *Adjacency matrix* sendiri biasa dikenal dengan matriks ketetangaan, biasanya diberikan dalam bentuk matriks bujur sangkar atau matriks persegi yang bertujuan untuk mengetahui ketetangaan antara setiap elemen dengan elemen yang lainnya. Konsep

ketetangaan dalam materi teori graf sangatlah penting terutama kasus terkait pewarnaan graf dari suatu graf yang terhubung namun tidak memiliki arah di setiap sisinya. Kasus *adjacency matrix* dan pewarnaan graf yang akan peneliti kembangkan disini erat kaitannya dengan suatu operasi dari buah graf yang terhubung yang biasa dikenal dengan operasi korona. Pencarian *adjacency matrix* dari operasi korona graf berlian dengan graf lintasan pada penelitian ini memuat suatu bilangan keterhubungan pelangi kuat dikarenakan kedua graf tersebut sudah diberikan pewarnaan di setiap sisinya. Adanya pewarnaan yang berbeda di setiap sisi dari operasi korona kedua graf tersebut tidaklah memiliki peran penting dalam proses pencarian *adjacency matrix*. Tujuan peneliti menentukan *adjacency matrix* dari operasi korona dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf Br_3 dengan graf P_3 tersebut guna menentukan apakah hasil operasi korona dari $Br_3 \odot P_3$ tersebut berupa matriks simetri atau matriks *skew* simetri atau matriks *non* simetri. Proses penentuan bentuk matriks yang tepat dari operasi korona kedua graf yang memuat bilangan keterhubungan Pelangi kuat tersebut jauh lebih mudah apabila dikerjakan dengan bantuan sebuah software yang belum banyak dilakukan oleh orang lain seperti software pengolah dokumen *Latex* berupa *Tikz*. *Tikz* sendiri jarang sekali digunakan orang dalam melakukan penelitian terkait teori graf mungkin dikarenakan bahasa pemrogramannya yang susah dan memerlukan konsentrasi yang tinggi untuk mengoperasikannya. Hal inilah yang menjadikan keunikan dari penelitian terkait penentuan bentuk matriks yang tepat dari $Br_3 \odot P_3$ yang memuat pewarnaan busur berupa bilangan keterhubungan Pelangi kuat dengan berbantuan software *Tikz*. Penelitian terkait pewarnaan graf dan *adjacency matrix* sebelumnya sudah banyak dilakukan oleh beberapa peneliti terdahulu dalam bentuk graf yang berbeda dan dalam bentuk matriks yang berbeda serta dalam bentuk aplikasi/software yang berbeda. Salah satunya penelitian terkait bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf berlian yang dikemukakan oleh Shulhany dan Salman, dinotasikan dengan $rc(Br_n)$ dan $src(Br_n)$ (Shulhany dan Salman, 2015). Selain Shulhany dan Salman, masih ada peneliti lain yang juga mengemukakan terkait pewarnaan graf berlian dan pelabelan graf berlian dengan konteks yang sedikit berbeda (Riezsa, 2017; Akadji et al., 2019; Sulistiyono et al., 2020). Begitu pula, penelitian terkait graf lintasan pernah dikemukakan oleh beberapa peneliti sebelumnya dalam bentuk pencarian pewarnaan graf maupun pelabelan graf (Maulani et al., 2020; Yulia, 2015). Oleh karena itu, pada penelitian ini peneliti mencoba mengembangkan kasus pewarnaan graf dan *adjacency matrix* tersebut dengan mengaplikasikan software *Tikz* yang belum digunakan oleh khalayak umum dikarenakan diperlukan keterampilan khusus dalam mengoperasikan Bahasa pemrogramannya pada kasus terkait teori graf, aljabar linear, matematika ekonomi dan informatika ini.

METODE

Penelitian terkait penggunaan software pengolah dokumen berupa *Tikz* dalam membantu menentukan bentuk matriks yang tepat dari suatu graf $Br_3 \odot P_3$ yang memuat bilangan keterhubungan pelangi kuat dikarenakan setiap sisinya memiliki warna yang berbeda tersebut dilakukan dengan cara *trial and error* serta mengandalkan studi literatur dari berbagai sumber seperti buku digital, situs web, artikel ilmiah dll. Pemilihan software *Tikz* tersebut peneliti pilih dikarenakan masih jarang sekali peneliti lain yang belum mengaplikasikannya dalam kasus *adjacency matrix* dan pewarnaan graf. Tentunya, peneliti

juga harus mengetahui terlebih dahulu konsep *adjacency matrix* dan pewarnaan graf termasuk sifat-sifatnya dan contohnya sebelum mengaplikasikan dengan *Tikz*. Konsep *adjacency matrix* dan pewarnaan graf dapat peneliti peroleh dari studi literatur dari berbagai sumber yang berkualitas. Selanjutnya, peneliti menentukan beberapa langkah penting dalam melakukan penelitian ini meliputi penentuan visualisasi dari graf korona $Br_3 \odot P_3$, penentuan bilangan keterhubungan pelangi kuat (*src*) dari graf korona $Br_3 \odot P_3$, penentuan *adjacency matrix* dari graf korona $Br_3 \odot P_3$, pengolahan bentuk matriks dari graf korona $Br_3 \odot P_3$ serta penentuan kriteria simetri atau *non* simetri dari graf korona $Br_3 \odot P_3$. Langkah terakhir, pemberian kesimpulan dari bentuk umum dari graf korona $Br_3 \odot P_3$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini memaparkan hasil perhitungan berupa bentuk umum dari Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf Korona $Br_3 \odot P_3$ beserta gambar graf korona $Br_3 \odot P_3$ yang telah dicari *adjacency matrix* menggunakan *Tikz* yang aplikasinya masih jarang sekali dimanfaatkan peneliti lain dalam mencari pewarnaan graf dan bentuk *adjacency matrix* dalam kasus teori graf dan aljabar linear. Namun, terlebih dahulu perlu diberikan bentuk umum dari bilangan keterhubungan Pelangi kuat graf korona $Br_n \odot P_m$ disertai dengan gambar dan cara memperolehnya melalui beberapa tahapan. Bentuk umum dari bilangan keterhubungan Pelangi kuat dari graf korona $Br_n \odot P_m$ yang dapat dinotasikan sebagai $src(Br_n \odot P_m)$ dapat dituliskan sebagai berikut $src(Br_n \odot P_m) = src(Br_n) + \left(\left[\frac{u}{3}\right] \cdot (m + 1)\right)$, untuk $m \geq 2, n = 3, u \geq 2$.

Langkah pembuktian dari $src(Br_n \odot P_m)$ untuk graf berlian dengan banyaknya n adalah 3 dan graf lintasan dengan banyaknya m adalah 3 dijelaskan disini. Tahap pembuktian disini tidak serumit kasus untuk menunjukkan bilangan keterhubungan Pelangi kuat $Br_n \odot P_m$, namun hanya mengambil Sebagian kecil dari bentuk umum tersebut untuk dikembangkan dengan kasus yang sedikit berbeda dan berbantuan aplikasi atau software komputer dengan bahasa pemrograman yang berbeda dengan sebelumnya. Hal ini dikarenakan peneliti pada penelitian kali ini lebih berfokus pada pengembangan Bahasa pemrograman computer yaitu *Tikz* guna menentukan bentuk umum dari suatu pewarnaan graf yang memuat operasi korona dan dapat dicari matriks ketetanggannya. Kembali ke konteks pembuktian dari bentuk umum $src(Br_n \odot P_m)$ yang terdiri dari beberapa tahap.

Tahap pembuktian pertama, peneliti mendefinisikan graf Br_3 dari bentuk umum graf berlian Br_n sebagai graf terhubung yang mempunyai bilangan keterhubungan pelangi kuat berdasarkan hasil penelitian graf berlian dari peneliti sebelumnya. Menggunakan definisi graf korona, terdapat graf berlian Br_3 dan 3 buah bentuk salinan graf P_3 pada struktur graf $src(Br_3 \odot P_3)$ yang menjadi salah satu bagian kecil dari struktur graf $src(Br_n \odot P_m)$. Tahap pembuktian kedua, peneliti telah menunjukkan bahwa pada masing-masing $viPi^*$ atau $uiPi^*$ di $Br_3 \odot P_3$ memuat n warna tidak sama dengan menggunakan kontradiksi yakni misal diasumsikan ada $viPi^*$ atau $uiPi^*$ memuat warna yang tidak berbeda. Tahap pembuktian ketiga, peneliti telah menunjukkan bahwa $src(Br_n \odot P_m) \geq src(Br_n) + \left(\left[\frac{u}{3}\right] \cdot (m + 1)\right)$, untuk $m \geq 2, n = 3, u \geq 2$ berlaku untuk kasus khusus

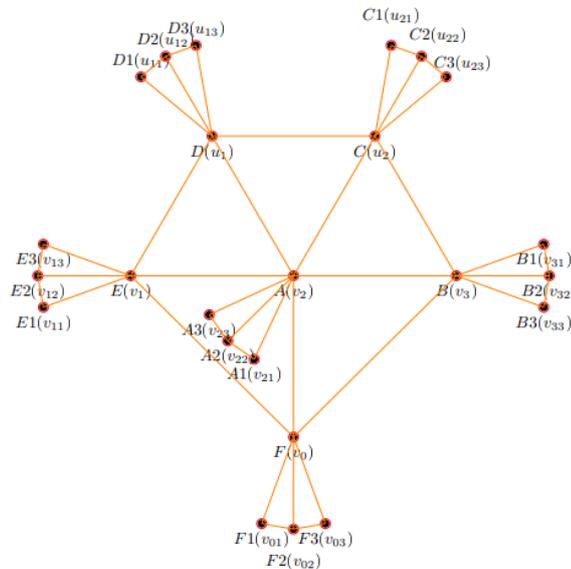
dari $src(Br_3 \odot P_3)$. Tahap keempat, peneliti telah menunjukkan bahwa $src(Br_n \odot P_m) \leq src(Br_n) + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m+1)\right)$, untuk $m \geq 2, n = 3, u \geq 2$ juga berlaku untuk kasus khusus $src(Br_3 \odot P_3)$. Tahap keempat ini peneliti harus menunjukkan 4 kemungkinan kasus guna menunjukkan dengan jelas bahwa struktur graf korona $src(Br_n \odot P_m)$ terbentuk dari graf berlian yang masing-masing pusatnya $\{v_0, v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ saling terhubung dengan graf lintasan yang lain lalu menghasilkan beberapa lintasan berisikan bilangan keterhubungan pelangi kuat juga berlaku untuk kasus khusus $src(Br_3 \odot P_3)$.

Empat buah kemungkinan kasus tersebut dapat peneliti jabarkan dengan beberapa tahapan. Kasus pertama, peneliti dapat mengambil dua buah sembarang simpul yang terdapat pada graf berlian guna menunjukkan bahwa setiap dua simpul yang diambil secara random tersebut selalu dapat ditemukan lintasan geodesic yang menghasilkan bilangan keterhubungan Pelangi kuat dari graf berlian Br_n maupun graf berlian Br_3 yang telah dikenakan operasi korona dengan graf lintasan. Kasus kedua, peneliti dapat mengambil dua buah sembarang simpul yang terdapat pada graf lintasan guna menunjukkan bahwa setiap dua simpul yang diambil secara random tersebut selalu dapat ditemukan lintasan geodesic yang menghasilkan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf berlian P_m maupun graf lintasan P_3 yang telah dikenakan operasi korona dengan graf berlian. Kasus ketiga, peneliti dapat mengambil dua buah sembarang simpul yang terdapat pada dua buah graf yang berbeda yakni satu buah simpul berasal dari graf berlian dan satu buah simpul berasal dari graf lintasan guna menunjukkan bahwa setiap dua simpul yang diambil secara random dari dua graf yang berbeda namun tetap terhubung tersebut selalu dapat ditemukan lintasan geodesic yang menghasilkan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona $src(Br_n \odot P_m)$ maupun graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ yang telah dikenakan operasi korona pada graf berlian dan graf lintasan tersebut. Terakhir, Kasus keempat, peneliti dapat mengambil dua buah sembarang simpul yang terdapat pada dua buah graf yang berbeda yakni satu buah simpul berasal dari graf lintasan dan satu buah simpul berasal dari graf berlian guna menunjukkan bahwa setiap dua simpul yang diambil secara random dari dua graf yang berbeda namun tetap terhubung tersebut selalu dapat ditemukan lintasan geodesic yang menghasilkan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona $src(Br_n \odot P_m)$ maupun graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ yang telah dikenakan operasi korona pada graf lintasan dan graf berlian tersebut. Berdasarkan semua tahapan langkah yang telah dijabarkan di atas, terlihat bahwa bentuk umum dari $src(Br_n \odot P_m)$ berlaku juga pada bentuk umum $src(Br_3 \odot P_3)$ dikarenakan $src(Br_3 \odot P_3)$ merupakan bagian dari bentuk $src(Br_n \odot P_m)$ yang telah terbukti kebenarannya. Selanjutnya, peneliti mengembangkan kasus pewarnaan busur graf korona dari graf berlian dan graf lintasan tersebut untuk menentukan bentuk *adjacency matrix* dari graf tersebut dengan berbantuan Tikz yang sangat jarang sekali digunakan peneliti lain untuk kasus terkait matematika khususnya graf.

Adjacency matrix biasa dikenal dengan sebutan matriks ketetanggaan dari suatu graf terhubung dapat berbentuk matriks simetri atau matriks skew simetri atau matriks non simetri. Bentuk-bentuk matriks tersebut biasanya direpresentasikan dalam bentuk matriks persegi atau matriks bujur sangkar tergantung dari banyaknya simpul yang termuat dalam graf terhubung tersebut. Pada umumnya, bentuk matriks simetri lebih tepat merepresentasikan *adjacency matrix* dari graf terhubung. Struktur graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ berupa graf yang terhubung dan tak berarah yang terdiri dari dua buah graf

yang digabungkan menjadi satu dengan suatu operasi korona graf yang memuat beberapa simpul dan sisi dimana setiap sisi dari graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ tersebut memuat pewarnaan graf yang biasa disebut dengan bilangan keterhubungan pelangi kuat yang menghasilkan lintasan geodesic untuk setiap pengambilan secara random dari sembarang dua buah simpul pada graf korona tersebut. Oleh karena itu, menurut teorema yang ada, peneliti mencoba menerapkan teorema tersebut pada graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ bahwa graf tersebut memiliki adjacency matrix berbentuk matriks yang simetri tentunya berbantuan Tikz, suatu aplikasi yang sangat jarang sekali digunakan oleh peneliti yang lain. Inilah yang menjadi keunikan dari penelitian ini.

Berikut ini diberikan hasil penelitian terkait *adjacency matrix* pada bilangan keterhubungan pelangi kuat (*src*) dari graf korona $Br_3 \odot P_3$. *Adjacency matrix* dari graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ diberikan dalam bentuk matriks bujur sangkar atau matriks persegi dengan diagonal utama elemennya bernilai nol dikarenakan tidak terdapat *loop* di setiap titik atau simpul dari graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$ tersebut. Lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Output Tikz dari graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$

	A	B	C	D	E	F	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3	E1	E2	E3	F1	F2	F3
A	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
E	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
F	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A3	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
E3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
F1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
F2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
F3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Gambar 2. Output Tikz adjacency matrix dari graf korona $src(Br_3 \odot P_3)$

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian hasil penelitian dan pembahasan terkait *adjacency matrix* dari struktur $src(Br_3)$ yang dikenakan operasi korona dengan struktur $src(P_3)$ menghasilkan matriks berbentuk bujur sangkar bersifat simetri atau setangkep beserta elemen-elemen di dalam matriks simetri yang ditampilkan dalam bentuk output dari pengolahan bahasa pemrograman dengan mengaplikasikan *Tikz* yang sangat unik dan menarik.

DAFTAR PUSTAKA

- Akadji, A. F., Taha, D., Lakisa, N., dan Yahya, N. I. (2019). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Amalgamasi Graf Berlian. *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, 7(2), 56–61. <https://doi.org/10.34312/euler.v7i2.10345>
- Maulani, A., Pradini, S., Setyorini, D., dan Sugeng, K. A. (2020). Rainbow connection number of $C_m \circ P_n$ and $C_m \circ C_n$. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(2), 95. <https://doi.org/10.19184/ijc.2019.3.2.3>
- Rieza, D. S. (2017). Penentuan Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number pada Graf Berlian. *Jurnal Matematika UNAND*, 6(3), 93. <https://doi.org/10.25077/jmu.6.3.93-99.2017>
- Shulhany, M. A., dan Salman, A. N. M. (2015). Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UMS*, 916–923.
- Sulistiyono, B., Slamini, Dafik, Agustin, I. H., dan Alfarisi, R. (2020). On rainbow antimagic coloring of some graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1465(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1465/1/012029>
- Yulia, A. H. (2015). *Kajian pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang*.