PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGITIGA PITA

HARMONIC LABELING ON TRIANGLE LADDER GRAPH

Kurniawan Atmadja
Program Studi Matematika Institut Sains dan Teknologi Nasional Jakarta, jalan Moh.Kahfi II, srengseng, Jagakarsa RT 13/09, Srengseng sawah, Kec. Jagakarsa, Jakarta Selatan, Daerah khusus Ibu Kota Jakarta
kurniawan_atmadja@istn.ac.id

ABSTRACT

A graph G (V, E) consists of the non-empty set of vertices V and the set of arcs E. The number of vertices is denoted by | V |, and the number of arcs is denoted by | E |. Harmonic labeling requires that many vertices do not exceed many arcs. Harmonic labeling is an injective function f from the set of vertices to the set of integers modulo | E | which generates the wise function f ^ ⋆ from the set of arcs to the set of integers modulo | E | where f ^ ⋆ (xy) = f (x) + f (y) (mod | E |) which results in a different arc label. The triangular ribbon ladder graph is obtained from the result of a ladder triangle graph 〖LS〗 _n whose shape is reversed like a rhombus, then arranged by bringing together a vertex at one vertex at one of its corners, and by adding one arc alternately, so that zigzag lengthwise resembling a ribbon. It is known that the ladder graph 〖LS〗 _n is a harmonic graph. In this paper, it is shown that a triangle ribbon ladder graph is also a harmonic graph.

Keywords: triangle ribbon ladder graph, ladder triangle graph 〖LS〗 _n, graph labeling, harmonic labeling.

ABSTRAK

Graf $G(V,E)$ terdiri dari himpunan tak kosong simpul Vdan himpunan busur $E.$ Banyak simpul dinotasikan dengan $|V|$, dan banyak busur dinotasikan dengan $|E|$. Pelabelan harmonis mensyaratkan banyak simpul tidak melebihi banyak busur. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ yang membangkitkan fungsi bijektif $f^{\star}$dari himpunan busur ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ dengan $f^{\star}(xy) = f(x) + f(y)(mod|E|)$ yang menghasilkan label busur yang berbeda. Graf tangga segitiga pita diperoleh dari hasil graf tangga segitiga LS_n yang bentuknya diputar balik seperti bentuk belah ketupat, lalu disusun dengan mempertemukan satu simpul pada satu simpul di salah satu sudutnya, dan dengan menambahkan satu busur secara berselang seling, sedemikian sehingga berzigzag memanjang menyerupai pita. Telah diketahui bahwa graf tangga segitiga LS_n adalah graf harmonis. Pada paper ini ditunjukan bahwa graf tangga segitiga pita juga merupakan graf harmonis.

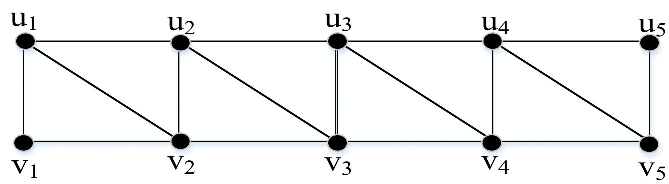
Kata kunci: graf tangga segitiga pita, graf tangga segitiga LS_n, pelabelan graf, pelabelan harmonis.

1. PENDAHULUAN

Pada penelitian ini, dikaji sebuah temuan graf yang diperoleh dari perluasan graf tangga segitiga LS_n. Pada graf tangga segitiga LS_n telah ditunjukan sebuah graf harmonis. Graf tangga segi-tiga LS_n adalah graf yang diperoleh melalui penambahan beberapa busur $u_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$ $untuk$ $n > 2$ pada graf tangga L_n, sehingga membentuk graf tangga baru yang disebut graf tangga segitiga LS_n dengan himpunan simpul $V(LS_n) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $V(LS_n) = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ (Atmadja dan Sugeng, Yuniarko, 2014). Kajian pada penulisan ini bertujuan untuk menambah koleksi perbendaharaan graf bidang kajian ilmu Matematika kombinatorika, yang dalam hal ini mengkaji graf terhubung segitiga dalam bentuk lain, dan sekaligus menunjukan graf tersebut adalah graf harmonis. Misalkan graf $G = (V, E)$, dapat disingkat G adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong V, dan himpunan busur E. Pada graf G, notasi $|V|$ menyatakan banyak simpul V dan notasi $|E|$ menyatakan banyak busur E. Graf G memiliki pelabelan harmonis jika dipenuhi syarat $|E| \geq |V|$. Graham dan Sloan (1980) memperkenalkan pelabelan harmonis, berawal dari kasus *error-corecting code*. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai suatu pemetaan injektif dari $V(G)$ ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ yang membangkitkan fungsi bijektif $f^\star$ dari himpunan busur ke himpunan bulat modulo $|E|$, sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label $f^\star(xy) = f(x) + f(y)$, menghasilkan label busur yang berbeda. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis.(Graham dan Sloane, 1980). Beberapa kelas graf dari hasil temuan telah diklasifikasikan sebagai katagori graf harmonis. Berkaitan dengan kajian graf yang diteliti pada tulisan ini adalah bentuk lain atau bentuk terbaru dari sebuah graf segitiga dari hasil pengembangan. Perbedaan mendasar dari kajian ini adalah bentuk graf segitiga yang tak isomorfis. Beberapa hasil kajian temuannya, masing – masing graf tidak isomorfis, dan telah dimuat dalam prosiding, antara lain hasil temuan graf tangga segitiga (Atmadja dkk, 2014), graf tangga segitiga variasi (Atmadja dan Sugeng, 2017), graf tangga segitiga ganda (Atmadja dan Sugeng, 2018). Kini berlanjut pada kajian kelas graf yang lain, yaitu kajian graf tangga segitiga pita yang akan ditunjukan sebagai graf harmonis yaitu sebuah graf yang memiliki pemetaan injektif $f: V(G) \to \mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian hingga membangkitkan pelabelan busur bijektiv $f: E(G) \to \mathbb{Z}_{|E|}$ dengan definisi $f^\star(xy) = f(x) + f(y)\ mod\ |E|$untuk setiap $xy \in E(G)$ menghasilkan anggota pelabelan busur yang berbeda. . Untuk informasi lebih lengkap mengenai pelabelan harmonis, dapat dilihat melalui Gallian survey (Gallian, 2019).

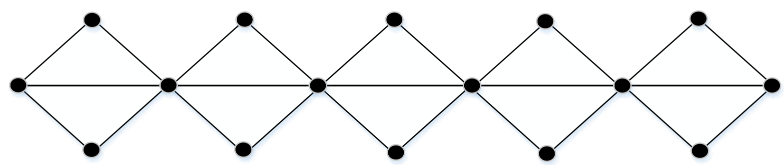
2. METODOLOGI

Diberikan untuk $n = 5$ pada graf tangga segitiga LS_n. Konstruksinya dapat dilihat pada gambar $2a$ di bawah ini :



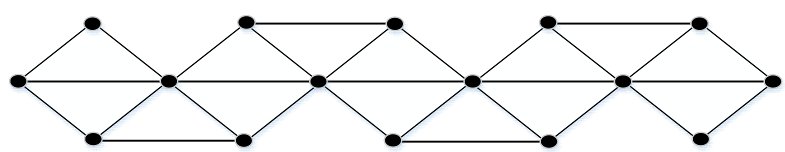
Gambar $2a$: Graf tangga segitiga LS_5

Metodologi konstruksi graf dilakukan dengan cara terlebih dulu mengambil graf LS_n untuk $n = 2$, kemudian diputar sedemikian rupa, lalu dihubungkan sehingga didapat bentuk konstruksi graf yang konstruksinya dapat dilihat pada gambar 2b berikut ini :



Gambar $2b$; Langkah konstruksi memutar

Langkah selanjutnya, yakni konstruksi graf gambar $2b$, dihubungkan busur secara berselang seling bergantian (atas dan bawah) sehingga membentuk konstruksi graf seperti pita yang memanjang. Konstruksinya dapat dilihat pada gambar $2c$ berikut :

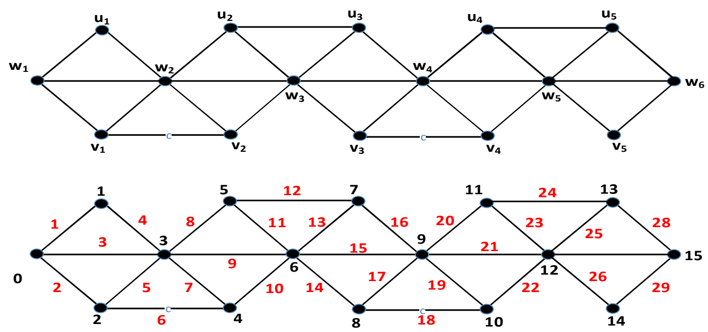


Gambar $2c$: Langkah konstruksi graf membentuk seperti pita

Dapat disampaikan kembali langkah pelabelan graf meliputi 1. Memutar balik terhadap graf tangga segitiga LS_n. 2. Mempertemukan satu simpul di salah satu sudut dengan satu simpul di satu sudut lainnya pada graf tangga segitiga LS_n, dan menambahkan satu busur secara berselang seling. 3. Memperoleh konstruksi graf terbaru yang konstruksinya menyerupai pita yang memanjang. 4. Melabelkan simpul dan busur pada graf yang diperoleh. 5. Melakukan pembuktian formal sesuai syarat dan konsep pelabelan graf harmonis.

3. PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan konstruksi graf tangga segi-tiga pita. Sesuai langkah – langkah metode pada penelitian ini, dikaji graf tangga segi-tiga LS_n, dan diperoleh temuan graf terbaru, yakni graf berbentuk pita yang memanjang, dan diberi nama dengan sebutan graf tangga segi-tiga pita dengan $p = 3n$ dan $q = 6n - 4, (n \geq 2)$. Hasil temuan graf terbaru dapat diberikan pada gambar 3 sebagai berikut :



Gambar 3 : Konstruksi graf tangga segi tiga pita dan pelabelannya

Definisi : Graf tangga segi-tiga pita adalah graf dengan himpunan simpul $V(G) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i, w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{w_i u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_{2i-1} v_{2i}, u_{2i} u_{2i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$.

Berikut dibahas teorema dan pembuktian pada hasil kajian temuan graf tangga segitiga pita yang terangkum di bawah ini.

Teorema. Graf tangga segitiga pita G untuk $n \geq 2$ adalah harmonis.

Bukti. Misalkan himpunan simpul $V(G) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i, w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{w_i u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_{2i-1} v_{2i}, u_{2i} u_{2i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$.

Definisikan pelabelan simpul $f: V \to \mathbb{Z}_{|E|}$ sebagai berikut :

$f(u_i) = \begin{cases} 3i - 2; & i \text{ ganjil} \\ 3i - 1; & i \text{ genap} \end{cases}$, dapat dulis :

$f(u_i) \in \{1,5,7,11,13,17, \dots,\} \subset (1 \bmod 6) \cup (5 \bmod 6) = \bar{1} \cup \bar{5} \dots \dots \dots \dots \dots (1)$

$f(v_i) = \begin{cases} 3i - 1; & i \text{ ganjil} \\ 3i - 2; & i \text{ genap} \end{cases}$, dapat ditulis :

$f(v_i) \in \{2,4,8,10,14,16,\dots\} \subset (2\ mod\ 6) \cup (4\ mod\ 6) = \bar{2} \cup \bar{4}$ … … … … … … (2)

$f(w_i) = 3i - 3$; $i = 1,2,\dots$, dapat ditulis :

$f(w_i) \in \{0,3,6,9,12,15,18,\dots\} \subset (0\ mod\ 6) \cup (3\ mod\ 6) = \bar{0} \cup \bar{3}$ … … … … … . (3)

Himpunan simpul dari persamaan (1) sampai dengan (3) dapat dihimpun dengan mendaftarkan sebagai berikut :$f(V(G)) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,\dots\}$. Anggota label simpul terkecil dari himpunan simpul tersebut terletak pada label simpul w_1 dengan $(f(w_1) = 0$. Nampak bahwa keanggotaan himpunan label simpul merupakan bilangan bulat dan setiap simpul memiliki label berbeda. Sehingga f memenuhi sebuah pemetaan dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat $f: V \to \mathbb{Z}_{|E|}$ dan f adalah fungsi injektif.

Pelabelan f akan menginduksi pelabelan busur sebagai berikut :

$$f^*(u_i w_i) = \begin{cases} f(u_i) + f(w_i) = 3i - 2 + 3i - 3 = 6i - 5\ ; i\ ganjil \\ f(u_i) + f(w_i) = 3i - 1 + 3i - 3 = 6i - 4\ ; i\ genap \end{cases}$$

$f^*(u_i w_i) \in \{1,8,13,20,25,32,37,\dots,\} \subset (1\ mod\ 12) \cup (8\ mod\ 12) = \bar{1} \cup \bar{8}$ … … (4)

$$f^*(w_i v_i) = \begin{cases} f(w_i) + f(v_i) = 3i - 3 + 3i - 1 = 6i - 4\ ; i\ ganjil \\ f(w_i) + f(v_i) = 3i - 3 + 3i - 2 = 6i - 5\ ; i\ genap \end{cases}$$

$f^*(w_i v_i) \in \{2,7,14,19,26,31,38,\dots,\} \subset (2\ mod\ 12) \cup (7\ mod\ 12) = \bar{2} \cup \bar{7}$ … … (5)

$$f^*(u_i w_{i+1}) = \begin{cases} f(u_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i+1) - 3 = 6i - 2\ ; i\ ganjil \\ f(u_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 1 + 3(i+1) - 3 = 6i - 1\ ; i\ genap \end{cases}$$

$f^*(u_i w_{i+1}) \in \{4,11,16,23,28,35,40,\dots,\}$

$\subset (4\ mod\ 12) \cup (11\ mod\ 12) = \bar{4} \cup \overline{11}$ … … … … … … … … … … … … . (6)

$f^*(w_i w_{i+1}) = f(w_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 3 + 3(i+1) - 3 = 6i - 3; i = 1,2,3,\dots$

$f^*(w_i w_{i+1}) \in \{3,9,15,21,27,33,39,\dots,\}$

$\subset (3\ mod\ 12) \cup (9\ mod\ 12) = \bar{3} \cup \bar{9}$ … … … … … … … … … … … … … . (7)

$$f^*(v_i w_{i+1}) = \begin{cases} f(v_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 1 + 3(i+1) - 3 = 6i - 1\ ; i\ ganjil \\ f(v_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i+1) - 3 = 6i - 2\ ; i\ genap \end{cases}$$

$f^*(v_i w_{i+1}) \in \{5,10,17,22,29,34,41,\dots,\}$

$\subset (5\ mod\ 12) \cup (10\ mod\ 12) = \bar{5} \cup \overline{10}$ … … … … … … … … … … … … (8)

$f^*(v_{2i-1} v_{2i}) = 3(2i - 1) - 1 + 3(2i) - 2 = 12i - 6$; $i = 1,2,3$

$f^*(v_{2i-1} v_{2i}) \in \{6,18,30,42,54,66,78,\dots,\} \subset (6\ mod\ 12) = \bar{6}$ … … … … … … … (9)

$f^*(u_{2i} u_{2i+1}) = 3(2i) - 1 + 3(2i + 1) - 2 = 12i$; $i = 1,2,3$

$f^*(u_{2i} u_{2i+1}) \in \{12,24,36,48,60,72,84,\dots,\} \subset (0\ mod\ 12) = \bar{0}$ … … … … … … (10)

Dari persamaan (4) sampai dengan (10) dapat ditulis keanggotaan himpunan label busur sebagai berikut : $f^{\star}\big(E(G)\big) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,\dots\}$. Jelas terlihat bahwa setiap busur xy yang diberi label mengikuti pelabelan busur $f^{*}(xy) = \big(f(x) + f(y)\big)\, mod|E|$ menghasilkan label busur berbeda. Banyak busur $|E|$, dan label busur yang dihasilkan adalah 1,2,3,…,$|E|$, menunjukan pelabelan busur yang bijektif. Maka terbukti graf tangga segitiga pita adalah graf harmonis.

4. SIMPULAN

Memperhatikan hasil kajian pembahasan Graf tangga segitiga pita, konstruksinya merupakan hasil modifikasi dari graf tangga segitiga. Pelabelan pada graf tangga segitiga pita di mana pada label simpulnya memenuhi fungsi injektiv sesuai definisi pelabelan harmonis, yakni pada pelabelan simpul mengikuti kaidah pemetaan injektif $f: V(G) \to \mathbb{Z}_{|E|}$ yang membangkitkan pelabelan busur bijektif yaitu $f: E(G) \to \mathbb{Z}_{|E|}$ di mana sesuai definisi pelabelan busur $f^{*}(xy) = \big(f(x) + f(y)\big)\, mod|E|$ menghasilkan anggota pelabelan busur yang berbeda. Atas dasar pembahasan hasil yang diperoleh, maka menunjukan bahwa graf tangga segitiga pita sebagai graf harmonis.

5. DAFTAR PUSTAKA

Atmadja, K., Sugeng, K.A (2017) *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Variasi*, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2017, Departemen Matematika FMIPA UI: 642-647.

Atmadja, K., , Sugeng,K.A (2018) *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Ganda*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIX 2018, Universitas Brawijaya Malang: 163-167

Atmadja, K., , Sugeng,K.A, Yuniarko, T (2014) *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014, ITS Surabaya.

Gallian,J.A(2019) Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronical Journal of Combinatorics*,16#DS6.

Graham R L and Sloane N J A (1980) On Additive Bases and Harmonious graph *SIAM J. Alg. Discrete Methods,* Vol 1: 382-404.