TEOREMA TITIK TETAP MENJAMIN EKSISTENSI MASALAH NILAI AWAL

FIXED POINT THEOREM ASSURES THE EXISTENCE OF AN INITIAL VALUE PROBLEM

Aloysius Joakim Fernandez, Michael Fernandez
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Katolik Widya Mandira, Jln, San Juan no 1, Penfui-Kupang
louisnandez@unwira.ac.id

ABSTRACT

This article covers the concepts of Fixed Points and how they apply to initial value problems. This Fixed Point concept approach with the Metric Space concept in Banach Space. The concept of a fixed point in a banach space provides a guarantee or condition that a function of the complete metric space itself has a single fixed point. This application is to ensure the existence and unity of the initial value problem, the first order differential equation. The iteration method is one of the methods used in this article for settlement

Keywords: Metric, Banach, fixed, differential

ABSTRAK

Artikel ini membahas konsep Titik Tetap dan bagaimana penerapannya pada masalah nilai awal. Pendekatan konsep Titik Tetap ini dengan konsep Ruang Metrik di Ruang Banach. Konsep titik tetap dalam Ruang Banach memberikan jaminan atau ketentuan bahwa fungsi dari ruang metrik lenkap memiliki satu titik tetap. Penerapan pada persamaan diferensial orde satu ini memastikan keberadaan dan kesatuan masalah nilai awal. Metode iterasi adalah salah satu metode yang digunakan dalam artikel ini untuk menemukan penyelesaian.

Kata Kunci: Metrik, Banach, Tetap, Diferensial

1. PENDAHULUAN

Tujuan proses matematika adalah untuk menyelesaikan suatu persamaan. Namun demikian bahwa sebelum menyelesaikan masalah persamaan matematika, perlu terlebih dahulu mengetahui apakah persamaan tersebut mempunyai penyelesaiaan atau tidak.

Misalkan terdapat fungsi $f(x)$, fungsi $f$kontinu pada interval tertutup [a,b] dan jika $f(a)$ dan $f(b)$ memiliki tanda yang berbeda maka persamaan

$$f(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

mempunyai sedikitnya satu penyelesaiaan di dalam interval [a,b].

Penyelesaiaan persamaan di atas membutuhkan suatu teorema yang menjamin ada tidaknya penyelesaiaan. Eksistensi dari teorema yang menjamin adanya penyelesaiaan ini dikenal dengan prinsi titik tetap (*fixed point principle*). Misalkan persamaan (1) ini dapat ditulis menjadi $\beta f(x) + x = x$ dengan β adalah parameter positif. Jika $\beta f(x) + x$ dinyatakan dengan $F(x)$, maka diperoleh persamaan baru

$$F(x) = x \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Titik x dalam persamaan (2) disebut sebagai titik tetap. Sehingga persamaan tersebut mempunyai satu penyelesaiaan dalam interval [a,b].

Konsep prinsip titik tetap dimulai kira-kira tahun 1500 sebelum masehi di Mesapotamia. Masalah awal yang muncul yakni:

$$x^2 = b \in \mathbb{N} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Muncul masalah ini kemudian dirumuskan dalam masalah titik tetap (fixed point problem), yakni

$$x^2 - b = 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$x^2 + x - b = x \dots\dots\dots\dots (4).$$

Masalah titip tetap (3) diselesaikan dengan *Successive subsituttion* (SS) yang menghasilkan *approximate solution*

$$x_0 = 1 \dots\dots\dots\dots. (5)$$

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n - b, untuk\ n = 0,1,2, \dots, \dots\dots\dots. (6)$$

Perumusan tersebut kemudian dikembangkan *fixed point problem* abstrak yakni

$$f(x) = x$$

Titik x dalam persamaan ini disebut titik tetap.

Topik pembahasan Teorema Titik Tetap ini dikaji di dalam Ruang Banach. Ruang Banach itu merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan Norma (*Norm*). Teorema Titik Tetap dalam Ruang Banach menjadi syarat cukup suatu fungsi dalam ruang metrik lengkap ke dirinya sendiri, mempunyai titik tetap yang tunggal. Sehingga pembahasan diawali dengan konsep dasar tentang Ruang Metrik (*Metric Space*).

Manfaat penelitian ini agar supaya adanya penambahan pengetahuan bagi penulis dan pembaca. Lebih jauh lagi bahwa dengan hasil penelitian dapat juga dikembangkan dalam perkuliahan.

Berdasarkan masalah ini maka peneliti akan mengkaji konsep-konsep titik tetap pada Ruang Banach dan penerapannya pada masalah nilai awal.

2. METODOLOGI PEMBUKTIAN TEOREMA TITIK TETAP

Penelitian ini tergolong pada penelitian studi literatur, dengan mencari referensi yang relevan dengan konsep-konsep yang akan dikaji.

Penelitian ini mengkaji sumber-sumber atau referensi yang membahas tentang konsep-konsep yang mendukung konsep utama Titik Tetap Pada Ruang Banach dan juga aplikasinya pada persamaan diferensial.

Tahapan-tahapan dalam penelitian, antara lain

Penelitian ini tergolong pada penelitian studi literatur, dengan mencari referensi yag relevan dengan konsep-konsep yang akan dikaji.

Penelitian ini mengkaji konsep utama yakni, Teorema Titik Tetap Pada Ruang banach dan aplikasinya. Penelitian ini mengkaji sumber-sumber atau referensi yang membahas tentang konsep-konsep yang mendukung konsep utama Titik Tetap Pada Ruang Banach dan juga aplikasinya pada persamaan diferensial.

3. PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan teori-teori pendukung yang diperlukan dalam pembuktian Teorema Titik Tetap.

Definisi 1.1 (Kreyszig, 1978)

Diketahui himpunan X tidak kosong. Suatu metrik pada X adalah fungsi d dari $X \times X$ ke $\mathbb{R}$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

b. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

c. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$

d. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap setiap $x, y, z \in X$

Ruang Metrik (X, d) merupakan pasangan himpunan kosong X dan d metrik pada X.

Definsi 1.2 (Kreyszig, 1978)

Misalkan diberikan $X = \mathbb{R}^n$. Definisikan fungsi $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan metrik yang didefinsikan

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2} \dots \dots \dots \dots (7)$$

Untuk setiap $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang metrik, yang sering disebut sebagai ruang **metrik Euclid**.

Contoh 1.3

Misalkan diberikan $X = C[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} | f\ fungsi\ kontinu\}$. Definisikan $d: C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ dengan metrik yang didefinisikan

$$d(f_1, f_2) = \sup_{t \in [a,b]} |f_1(t) - f_2(t) \dots \dots \dots \dots (8)|$$

Jika $f_1, f_2 \in C[a,b]$ maka $(C[a,b], d)$ merupakan ruang metrik.

Bukti

Untuk membuktikan $(C[a,b], d)$ merupakan ruang metrik, artinya bahwa $d(f_1, f_2)$ memenuhi aksioma-aksioma

i. $d(f_1, f_2) \geq 0$ karena $|f_1(t) - f_2(t)| \geq 0$, yang berakibat bahwa

$$\sup_{t \in [a,b]} |f_1(t) - f_2(t)| \geq 0$$

ii. $d(f_1, f_2) = 0$ jika dan hanya jika $f_1 = f_2$

Jika $d(f_1, f_2) = 0$ maka $f_1 = f_2$

$\Leftrightarrow d(f_1, f_2) = 0$

$\Leftrightarrow \sup_{t \in [a,b]} |f_1(t) - f_2(t)| = 0$

$\Leftrightarrow |f_1(t) - f_2(t)| = 0$

$\Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$ untuk setiap $t \in [a,b]$

$\Leftrightarrow f_1 = f_2$

$Jika\ \ f_1 = f_2$ maka $d(f_1, f_2) = 0$

Jika $f_1 = f_2$ maka $f_1(t) = f_2(t)$ untuk setiap $t \in [a, b]$

$$\Leftrightarrow d(f_1, f_2) = \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)|$$

$$\Leftrightarrow = \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_1(t)|$$

$$\Leftrightarrow = \sup_{t\in[a,b]} |0|$$

$$\Leftrightarrow = 0$$

iii. $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$

$$\Leftrightarrow d(f_1, f_2) = \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)|$$

$$\Leftrightarrow = \sup_{t\in[a,b]} |f_2(t) - f_1(t)|$$

$$\Leftrightarrow = d(f_2, f_1)$$

iv. $d(f_1, f_2) = \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)|$

Perhatikan:

$$\begin{aligned} |f_1(t) - f_2(t)| &= |f_1(t) - f_3(t) + f_3(t) - f_2(t)| \\ &\leq |f_1(t) - f_3(t)| + |f_3(t) - f_2(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_3(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f_3(t) - f_2(t)| \end{aligned}$$

Diperoleh

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_3(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f_3(t) - f_2(t)|$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_3(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f_3(t) - f_2(t)|$ merupakan batas atas dari $|f_1(t) - f_2(t)|$, yang mengakibatkan bahwa

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_3(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f_3(t) - f_2(t)|$$

$$d(f_1, f_2) \leq d(f_1, f_3) + d(f_3, f_2)$$

Definisi 1.4 (Kreyszig, 1978)

Diberikan sebarang ruang metrik $(X, d), x_0 \in X$ dan bilangan real $r > 0$. Bola terbuka, bola tertutup dan luasan bola dengan pusat x_0 dan jari-jari r berturut-turut didefinisikan sebagai:

Bola Terbuka (*Open Ball*) $\quad B(x_0, r) \coloneqq \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$

Bola Tertutup (*Closed Ball*) $\bar{B}(x_0, r) := \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$

Luasan Bola (*Sphere*) $S(x_0, r) := \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$

Definsi 1.5 (Kreyszig, 1978)

Diberikan sebarang ruang metrik (X, d). Himpunan $K \subseteq X$ terbuka jika untuk setiap $x \in K$ terdapat bola terbuka B sehingga $x \in B \subseteq K$. Himpunan $K \subseteq X$ tertutup jika komplemennya terbuka.

Definisi 1.6 (Allan, 2002)

Diketahui $X = (X, d_1)$ dan $Y = (Y, d_2)$ adalah ruang metrik. Fungsi $T: X \rightarrow Y$ kontinu di $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x memenuhi $d_1(x, x_0) < \delta$ sedemikian sehingga berlaku $d_2\big(T(x), T(x_0)\big) < \varepsilon$. Fungsi T dikatakan kontinu jika T kontinu di setiap $x \epsilon X$.

Definisi 1.7

Misalkan Ruang Metrik (X, d) dan $M \subset X$. Titik $x_0 \in X$ disebut titik limit atau titik akumulasi M jika persekitaran dari x_0 memuat titik lain anggota M selain x_0. Himpunan semua titik limit M ditulis dengan M'. Himpunan semua titik anggota M digabung dengan himpunan semua titik limit disebut dengan penutup (*closure*) himpunan M dan dinotasikan $\overline{M} = M \cup M'$.

Definisi 1.8

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika ada $x \in X$ sehingga

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

titik x disebut limit barisan (x_n) dan dapat ditulis

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

atau dapat disingkat

$$x_n \to x$$

Barisan yang tidak konvergen disebut divergen.

Teorema 1.9

Misalkan Ruang Metrik (X, d), maka

a. Barisan konvergen $(x_n) \in X$ adalah terbatas dan limitnya tunggal
b. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y \in X$ maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

Definisi 1.10 (Walter, 1976)

Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap$\varepsilon > 0$, terdapat $N = N(\varepsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$.

Ruang metrik (X, d) dikatakan **lengkap** jika setiap n barisan Cauchy dalam X konvergen.

Definisi 1.11

Barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy bilangan real jika dan hanya jika memenuhi kriteria kekonvergenan Cauchy yakni untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dimana untuk setiap $m, n > N$ berlaku $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Definisi 1.12

Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dimana untuk setiap $m, n > N$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam (X, d) konvergen.

Teorema 1.13

Setiap barisan (x_n) konvergen dalam suatu ruang metrik merupakan Barisan Cauchy

Teorema 1.14

Misalkan M himpunan bagian tak kosong dari ruang metrik (X, d) dan $\overline{M}$ adalah penutup M.

a. $x \in \overline{M}$ jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) pada M sedemikian sehingga $x_n \to x$.
b. Himpunan M tertutup jika dan hanya jika $x_n \in M$ dan $x_n \to x$ berakibat $x \in M$.

Definisi 1.15

Misalkan ruang metrik (X, d). Jika Himpunan $Y \subseteq X$ maka (Y, d) merupakan ruang metrik

Teorema 1.16

Misalkan ruang metrik (X, d_1) dan (Y, d_2). Fungsi $T: X \to Y$ kontinu di titik $x_0 \in X$ jika dan hanya jika $x_n \to x_0$ berakibat $T(x_n) \to T(x_0)$

Definisi 1.17

Diketahui (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \to X$ disebut fungsi kontraksi pada X jika terdapat bilangan real α dengan $0 \le \alpha < 1$ sehingga $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \le \alpha d(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$

Definsi 1.18 (Kreyszig, 1978)

Diketahui (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \to X$ dikatakan memiliki kondisi Lipshitz apabila terdapat bilangan real positif α sehingga berlaku $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \le \alpha d(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

Teorema 1.19

Jika (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \to X$ disebut fungsi kontraksi pada X maka F kontinu pada X

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan x_1 sebarang titik pada X.

i. Jika $\alpha = 0$ maka $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) = 0 < \varepsilon$ untuk setiap $x_2 \in X$
ii. Jika $\alpha \ne 0$ diambil $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ dan x_2 sebarang titik di X dengan $d(x_1, x_2) \le \delta$ maka $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \le \alpha d(x_1, x_2) < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$.

Diperoleh bahwa F kontinu di x_1. Karena x_1 sebarang di X maka F kontinu pada X.

Definisi 1.20

Diketahui (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \to X$ dan $\bar{x} \in X$ disebut sebagai titik tetap dari fungsi F jika berlaku $F(\bar{x}) = \bar{x}$

Teorema 1.21 (Teorema Titik Tetap di Ruang Banach)

Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Setiap fungsi kontraksi $F: X \to X$ mempunyai sebuah titik tetap yang tunggal.(Allan, 2002)

Bukti

Karena fungsi F kontraksi pada ruang metrik X maka terdapat bilangan real α dengan $0 \leq \alpha < 1$ sehingga berlaku $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \leq \alpha d(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$

Perhatikan

$$\begin{gathered}
x_1 = F(x_0) \\
x_2 = F(x_1) = F\big(F(x_0)\big) = F^2(x_0) \\
x_3 = F(x_2) = F\big(F^2(x_0)\big) = F^3(x_0) \\
x_4 = F(x_3) = F\big(F^3(x_0)\big) = F^4(x_0) \\
\vdots \\
x_n = F(x_{n-1}) = F\big(F^{n-1}(x_0)\big) = F^n(x_0)
\end{gathered}$$

Akan ditunjukkan (x_n) merupakan barisan Cauchy

$$\begin{gathered}
d(x_n, x_{n+1}) = d\big(F(x_{n-1}), F(x_n)\big) \\
\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) = \alpha d\big(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})\big) \\
\leq \alpha\alpha d(x_{n-2}, x_{n-1}) = \alpha^2 d\big(F(x_{n-3}), F(x_{n-2})\big) \\
\leq \alpha^2\alpha d(x_{n-3}, x_{n-2}) = \alpha^3 d\big(F(x_{n-4}), F(x_{n-3})\big) \\
\vdots \\
\leq \alpha^n d(x_0, x_1)
\end{gathered}$$

Perhatikan untuk setiap $n \geq m, n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered}
d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\
\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1) \\
\leq \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\
\leq \alpha^m \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha}\right) d(x_0, x_1) \\
< \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)
\end{gathered}$$

akan konvergen ke 0 untuk $m \to \infty$. Sehingga (x_n) merupakan barisan Cauchy dan karean itu (x_n) konvergen ke suatu $x \in X$.

Kekontinuan F pada X mengakibatkan

$$F(\bar{x}) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}$$

Andaikan $F(\bar{y}) = \bar{y}$ untuk suatu $\bar{y} \in X$ lainnya dan $\bar{y} \neq \bar{x}$ maka berlaku

$$d(\bar{x},\bar{y}) = d(F(\bar{x}),F(\bar{y})) \leq \alpha d(\bar{x},\bar{y})$$

Karena $0 \leq \alpha < 1$ dan $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ maka $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$. Jadi $\bar{x} = \bar{y}$.

Akibat 1.22

Misalkan $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ dan $f: I \to I$ fungsi terdiferensial di setiap titik dalam I dengan $|f'(x)| \leq k, 0 < k < 1$ untuk setiap $x \in I$ maka terdapat titik tunggal $x_0 \in I$ sehingga $f(x_0) = x_0$

Bukti

Misalkan f terdiferensial di setiap titik dalam I dan $|f'(x)| \leq k, 0 < k < 1$ untuk setiap $x \in I$. Berdasarkan Teorema Nilai Rata-Rata Lagrange, mengakibatkan $\left|\frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}\right| \leq k \Leftrightarrow |f(b_i) - f(a_i)| \leq k|b_i - a_i|$ untuk setiap $a_i, b_i \in I$. Hal ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi kontraksi.

Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka terdapat dengan tunggal $x_0 \in I$ sehingga $f(x_0) = x_0$.

Definsi 1.23

Diberikan (X,d) ruang metrik. Ruang X dikatakan mempunyai sifat titik tetap (Fixed Point Property) jika setiap fungsi kontinu $F: X \to X$ mempunyai titik tetap, yaitu terdapat $\bar{x} \in X$ sehingga $F(\bar{x}) = \bar{x}$

Penerapan Titik Tetap

Definisi 1.24

Misalkan $P(x_0, y_0)$ merupakan suatu titk di dalam daerah D. Sebuah fungsi $y = \varphi(x)$ adalah penyelesaiaan dari Masalah Nilai Awal $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ jika dan hanya jika $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ untuk x dalam suatu interval $I = \{x | x_0 - h \leq x_0 \leq x_0 + h\}$ dan jika φ memenuhi syarat syarat awal $y_0 = \varphi(x_0)$.

Teorema 1.25 (Allan, 2002)

Misalkan X merupakan ruang metrik dan $C(X)$ ruang metrik dari fungsi kontinu terbatas pada Xserta (f_n) barisan fungsi dengan $f_n \in C(X)$ untuk setiap n. Barisan (f_n) konvergen ke fungsi f dalam $C(X)$ jika dan hanya jika barisan (f_n) konvergen seragam ke fungsi f pada X.

Teorema 1.26

Jika X sebarang ruang metrik maka ruang metrik $C(X)$ lengkap.

Bukti

Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan Cauchy dalam $C(X)$. Hal ini bermakna bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n \geq \mathbb{N}$. Sebagai akibat terdapat fungsi f dengan domain X sehingga $\{f_n\}$ adalah konvergen seragam ke f. Jadi f kontinu yang berarti f terbatas yakni terdapat n sehingga $|f(x) - f_n(x)| < 1$ untuk semua $x \epsilon X$ dan f_n terbatas. Dengan demikian $f \epsilon C(X)$ dan karena $f_n \to f$ seragam pada X maka $d(f_n, f_m) \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Teorema 1.27

Diketahui fungsi $f: D \to \mathbb{R}$ kontinu, didefinisikan fungsi kontinu φ pada $I = \{x | x_0 - h \leq x \leq x_0 + h\}$ ke $\mathbb{R}$ dengan $\varphi(x_0) = y_0$ untuk suatu $(x_0, y_0) \epsilon D$. Fungsi φ merupakan penyelesaiaan dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x, \varphi(x))$ pada I jika dan hanya jika φ memenuhi persamaan integral $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, \varphi(x)\big) dx$

Bukti

Perhatikan

Dengan mengintegralkan $\frac{dy}{dx} = f(x, \varphi(x))$, di antara x_0 dan x dengan syarat $y(x_0) = y_0$ maka diperoleh

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} dy = f(x) - f(x_0)$$

Di lain pihak

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx = f(x) - y_0$$

Sehingga

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx$$

Teorema 1.28

Misalkan diberikan $S = \{(x,y)||x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k\}, |f(x,y) \leq M$ untuk suatu $M > 0$. Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ kontinu dan memenuhi Kondisi *Lipschitz* terhadap y, diambil x tetap yaitu $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \alpha|y_1 - y_2|$ untuk semua $(x,y_1),(x,y_2) \in S$.
Jika $Mh \leq k$ dan $ah < 1$ maka terdapat dengan tunggal fungsi terdiferensial kontinu φ pada $I = \{x|x_0 - h \leq x_0 \leq x_0 + h\}$ yang memenuhi $\varphi(x_0) = y_0$ dan $\frac{dy}{dx} = f\big(x,\varphi(x)\big)$.

Teorema 1.29 (Allan, 2002)

Misalkan E merupakan ruang metrik lengkap. Suatu fungsi F pada E dengan aturan $F(\varphi) = \psi$ dimana $\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi(t)\big)dt\,, \varphi \in E$.

Diperoleh

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi(t)\big)dt\right| \leq M|x - x_0| < Mh \leq k$$

Untuk setiap x sehingga $F(\varphi) = \psi$ pada E dan fungsi F memetakan ruang metrik E ke dirinya sendiri.

Akan ditunjukkan bahwa F adalah fungsi kontraksi. (Allan, 2002)

Misalkan $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ dengan $F(\varphi_1) = \psi_1$ dan $F(\varphi_2) = \psi_2$

$$|\psi_2(x) - \psi_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi_2(t)\big)dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t,\varphi_1(t)\big)dt\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \{f\big(t,\varphi_2(t)\big) - f\big(t,\varphi_1(t)\big)\}dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \alpha\,|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|dt$$

$$\leq \alpha \sup_{t\in I}|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)||x - x_0|$$

$$\leq \alpha h\, d(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Oleh karena $\alpha h < 1$, maka F merupakan fungsi kontraksi, berakibat bahwa F mempunyai titik tetap tunggal. Dengan kata lain bahwa $\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt$ mempunyai penyelesaiaan tunggal.

Teorema ini yang kemudian dikenal dengan Teorema Eksistensi dan Ketunggalan Picard.

Teorema 1.30 (M-Weisrstrass)

Diberikan $a_n(x)$ merupakan barisan fungsi $S \in \mathbb{R}^k$ ke $\mathbb{R}^m$ dan (M_n) merupakan barisan bilangan real sehingga

$$|a_n|_\infty = \sup_{x\in S}|a_n(x)| \leq M_n \ untuk\ a \in S$$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konvergen seragam dalam S.

Bukti

Untuk setiap $x \in S$, barisan $a_n(x)$ konvergen seragam karena

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)| < \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

Berakibat

Untuk setiap $x \in S$, misalkan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

$$\left|f(x) - \sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(x)\right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x)|_\infty \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n$$

Kemudian

$$\lim_{k\to\infty}\left|f(x) - \sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{k} M_n = 0$$

Dengan demikian suku-suku ini akan konvergen seragan ke f.

Berikut akan diberikan contoh terkait dengan masalah nilai awal, sebagai berikut

Contoh 1.31

Misalkan diketahui masalah nilai awal

$$f'(x) = 1 + x - f(x), x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(0) = 1$$

Penyelesaiaan

Berdasarkan yang diketahui maka, persamaan integral sebagai berikut

$$f(x) = 1 + \int_0^x \big(1 + t - f(t)\big)dt$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)dt, \qquad f \in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Didefinisikan fungsi T dalam $C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ yang memetakan f menjadi $T(f)$ dengan $T\big(f(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)dt.$

Selanjutnya

Akan ditunjukkan bahwa T fungsi kontraksi

$$d\big(T(f), T(g)\big) = \left|T\big(f(x)\big) - T\big(g(x)\big)\right|$$

$$= \left|\int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)dt\right|$$

$$\leq \int_0^x |f(t) - g(t)|dt$$

$$\leq \int_0^x d(f, g)\, dt$$

$$= d(f, g)\int_0^x dt$$

$$\leq \frac{1}{2}d(f, g)$$

Maka

$$d\big(T(f), T(g)\big) \leq \frac{1}{2}d(f, g)$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi.

Selanjutnya akan ditunjukkan penyelesaian persamaan diferensial sebagai berikut

Misalkan untuk sebrang barisan fungsi (f_n) dan $f_{n+1} = T(f_n)$ akan konvergen ke f dalam $C\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Misalakan ambil fungsi konstan f_0 yaitu $f_0(x) = 1$

$$f_1(x) = T\big(f_0(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x 1dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f_2(x) = T\big(f_1(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2\right)dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$f_3(x) = T\big(f_2(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right)dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Secara umum dengan menggunakan induksi matematika diperoleh

$$f_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}(-x)^{n+1}$$

Dengan norma maksimum

$$\sup_{|x|\leq\frac{1}{2}} \left|\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left(2^{n+1}(n+1)!\right)^{-1}$$

Deret kuasa ini akan konvergen seragam dalam$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Diperoleh

$$f(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}(-x)^k = e^{-x} + x$$

4. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, terdapat bebrapa simpulan antara lain:

1. Fungsi Kontinu $f: [a,b] \to [a,b]$ mempunyai paling sedikit satu titik tetap, $x_0 \in [a,b]$ sedemikian hingga $f(x_0) = x_0$.

2. Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Setiap fungsi kontraksi mempunyai titik tetap tunggal. Fungsi tersebut didefinisikan : $X \rightarrow X$. Teorema Titik Tetap Banach ini memberikan jaminan tentang eksistensi dan ketunggalan penyelesaiaan dan juga, yang memiliki titik tetap. Penyelesaiaannya dilakukan dengan metode iterasi
3. Teorema Titik Tetap Banach dapat diterapkan dalam penyelesaiaan masalah nilai awal atau persamaan diferensial orde satu $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, dengan diketahu niali awal.

5. DAFTAR PUSTAKA

Allan, D.R.K. & D.P. (2002). *Real Analysis with Real Applications*. United State of America: Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458.

Davidson, Kenneth, R. Donsig, Allan, P. (2002). Real Analysis with Real Applications. New Jersey: Pretice Hall, Inc.

Gordon, Russel A. (1997). Real Analysis: A first Course. Addison-Wisley Publishing Company.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications.* New York: John Wiley and Sons.

Parzynski, R. William and Zipse, W. Philip. (1987). Introduction to Mathematical Analysis. McGraw-Hill Book Company.

Protter, H. and Morrey, B. Charles, Jr (1997). A First Course in Real Analysis. New York: Springer-Verlag

Simmons, F. George. (1963). Introduction to Topology and Modern Analysis. Florida, Malabar: Robert E. Krieger Publishing Company.

Shaskin, Yu. A. (1991). Fixed Point. USA: American Mathematical Society.

Walter, R. (1976). *Principles of Mathemmatical Analysis (3th ed)*. Singapore: McGraw-Hill.