

HAMBATAN BELAJAR MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA DALAM MATA KULIAH KALKULUS DIFERENSIAL

MATHEMATICS EDUCATION STUDENTS' STRUGLES LEARNING IN DIFFERENTIAL CALCULUS COURSES

Ade Mirza¹⁾, Isnurani^{2)*}, Rustam¹⁾,

¹⁾ Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Kalimantan Barat

²⁾ Program Studi Matematika, Universitas Pamulang, Tangerang selatan, Banten

dosen01193@unpam.ac.id

ABSTRACT

This study examined deeply about: a) what kind of difficulties students faced in learning the material covered on differential calculus courses are, b) what the learning barriers for students on solving problems covered on differential calculus courses are.

This study was conducted with the aim of exploring the forms of student learning difficulties and barriers in attending differential calculus lectures in the mathematics education study program at the Teaching and Education Faculty, Tanjungpura University.

Through this study, it was hoped that the types of difficulties and struggles to learned differential calculus. Furthermore, these findings can be used as a learning material to be used in developing learning designs (didactic designs) that are more effective for improving differential calculus performance in lectures.

Keywords: *Differential, learning difficulties, Learning struggles*

ABSTRAK

Penelitian ini akan mengkaji secara mendalam mengenai: a) apa saja bentuk kesukaran yang dihadapi oleh mahasiswa dalam mempelajari materi yang tercakup dalam mata kuliah kalkulus diferensial, b) apa saja hambatan belajar mahasiswa dalam menyelesaikan soal yang tercakup dalam mata kuliah kalkulus diferensial.

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mengeksplorasi bentuk kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan kalkulus diferensial pada program studi pendidikan matematika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Tanjungpura.

Melalui hasil penelitian ini diharapkan dapat diketahui jenis-jenis kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan kalkulus diferensial. Kemudian, temuan ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian untuk digunakan dalam menyusun rancangan pembelajaran (desain didaktik) yang lebih efektif untuk meningkatkan kualitas perkuliahan kalkulus diferensial.

Kata kunci: *Hambatan belajar, Diferensial, Kesulitan belajar*

1. PENDAHULUAN

Kalkulus adalah salah satu mata kuliah dasar yang teramat penting bagi ilmu pengetahuan dan peserta didik (mahasiswa) matematika di universitas. Akan tetapi, masih

banyak peserta didik (mahasiswa) yang tidak dapat mencapai pengertian/pemahaman yang mendalam (*understanding to*). Bahkan, kalkulus dipandang sebagai pelajaran (mata kuliah) yang sangat sukar untuk dipelajari, menjemukan, serta subjek yang abstrak (Zhang, 2003; Zhou, 2002).

Berbagai ragam kesulitan dan faktor kesulitan, sering dihadapi mahasiswa ketika memasuki perkuliahan kalkulus. Menyelesaikan suatu persamaan ataupun pertidaksamaan pada perkuliahan awal kalkulus misalnya, merupakan suatu tugas tradisional dalam pelajaran matematika (Purcell & Varberg, 1991). Tugas ini telah dilakukan mulai dari tingkat pendidikan dasar (SMP). Hal ini penting untuk diingat bagaimana mengerjakannya. Hal yang tidak kalah penting adalah memahami cara penyelesaiannya.

Meski pertidaksamaan telah dipelajari di tingkat sekolah menengah, dan diulang kembali untuk lebih memahaminya di tingkat awal perkuliahan pada program studi pendidikan matematika (mata kuliah kalkulus diferensial), namun tidak dapat dipungkiri bahwa tidak sedikit mahasiswa, bahkan sebagian besar mahasiswa pada program studi pendidikan matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Tanjungpura (FKIP Untan) mengalami kegagalan dalam menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan. Hasil pra- survey menunjukkan bahwa dari 29 orang mahasiswa pendidikan matematika semester dua tahun akademik 2018/2019 dan 30 orang mahasiswa peserta PPG matematika Prajabatan tahap I tahun 2019 yang diberikan soal untuk menentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{1}{x} < 5$; tidak ada satu pun yang dapat memberikan jawaban dengan benar. Hanya ada satu orang mahasiswa yang dapat menentukan himpunan penyelesaiannya, namun proses mendapatkannya terdapat kekeliruan (tidak memberi syarat $x \neq 0$). Hampir semua mahasiswa memberikan jawaban bahwa himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > \frac{1}{5}\}$, dan ada tiga orang menjawab himpunan penyelesaiannya adalah x tidak nol “dan/atau” $x > 1/5$.

Terkait dengan limit, ditemukan juga fakta bahwa mahasiswa banyak mengalami kesulitan bila diminta membuktikan kebenaran nilai limit dari suatu fungsi menggunakan $\varepsilon - \delta$ (definisi formal). Umumnya mereka memberikan bukti atau menunjukkan kebenarannya dengan cara melakukan substitusi.

Kenyataan tersebut tentu dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor. Beberapa temuan hasil penelitian yang dilaporkan oleh Andini dan Yahya (dalam Margiyono dan Mampouw, 2011) yang terkait dengan kesalahan yang dilakukan oleh peserta didik di sekolah dalam menyelesaikan soal matematika antara lain akibat kesalahan konsep (kurang memahami konsep), dan kecerobohan dalam melakukan proses penyelesaian soal. Hasil Penelitian Mirza (2018), menemukan bahwa kesalahan yang dibuat mahasiswa dalam menyelesaikan soal pertidaksamaan yang melibatkan harga mutlak dan limit fungsi dapat dikategorikan dalam tiga kategori, yakni kesalahan konsep, kesalahan sistematis, dan kesalahan acak. Faktor-faktor penyebab terjadinya kesalahan tersebut antara lain: tidak paham konsep harga mutlak, lupa sifat-sifat persamaan/pertidaksamaan yang melibatkan pembagian dengan nol, tidak teliti/ceroboh dalam melakukan manipulasi aljabar, menganggap remeh/sepele, mudah frustrasi, tidak mau berpikir keras dan tidak cermat.

Selain itu, Kieran (1985), Kuchemann (1981), Kieran (1997) dan Sfard & Linchevsky (1994) menemukan adanya ketidakpahaman/kesulitan yang terkait dengan penggunaan dan makna dari simbol atau huruf, serta adanya kesulitan dan hambatan kognitif (Tall & Thomas, 1991). Hal tersebut menurut Brousseau (2002), dalam praktiknya, siswa secara alamiah mungkin mengalami situasi yang disebut sebagai kesulitan atau hambatan belajar (*learning obstacle*).

Sebagai seorang mahasiswa calon guru matematika, seyogyanya mereka telah mampu berpikir kritis terhadap setiap persoalan yang dihadapi. Apalagi memasuki abad 21 yang penuh dengan persaingan dan tantangan dengan diikuti oleh perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin canggih, tentu menuntut seseorang dengan kompetensi tertentu untuk mampu menjalani peningkatan arus globalisasi dan modernisasi dalam kehidupan dunia yang semakin kompleks (OECD, 2005).

Fokus dalam mengembangkan kompetensi pembelajaran matematika dalam menyambut abad 21 ini lebih menitikberatkan pada keterampilan matematis yang meliputi pemahaman konsep, kelancaran dalam prosedur, dan penyelesaian masalah serta pada keterampilan proses (daya matematis) yang meliputi komunikasi, penalaran, representasi, koneksi, dan proses dalam menyelesaikan permasalahan (NCTM, 2000; Toh & Kaur, 2016).

Memperhatikan fakta-fakta yang terjadi seperti yang telah diuraikan, tergerak untuk mengkaji lebih lanjut tentang jenis-jenis kesulitan dan hambatan belajar (*learning obstacle*) mahasiswa dalam mempelajari dan menyelesaikan masalah pada mata kuliah kalkulus diferensial. Melalui hasil penelitian ini diharapkan dapat diketahui macam-macam kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan kalkulus diferensial. Lebih lanjut, hasil temuan ini dapat digunakan sebagai bahan studi untuk digunakan dalam menyusun rancangan pembelajaran (desain didaktik) yang lebih efektif untuk meningkatkan kualitas perkuliahan kalkulus diferensial.

Walaupun materi yang tercakup dalam mata kuliah kalkulus diferensial itu pada umumnya telah dipelajari sebelumnya oleh mahasiswa ketika mereka menduduki bangku sekolah dasar dan menengah, tetapi pada kenyataannya masih banyak di antara para mahasiswa program studi pendidikan matematika FKIP Untan yang mengalami hambatan dalam mempelajarinya. Misalnya, masih ada mahasiswa yang menyatakan bahwa himpunan penyelesaian dari $x^2 < 4$ adalah $x < \pm 2$. Demikian pula untuk membuktikan limit fungsi menggunakan $\epsilon - \delta$, proses yang dilakukan mereka tidak jelas. Mereka hanya dapat menuliskan definisinya saja, tanpa tahu apa yang akan dituju. Sebagai contoh, bukti dari $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} = 2$; mereka hanya dapat menulis: Jika untuk setiap epsilon positif, ada delta positif sedemikian sehingga $0 < |x - 2| < \delta$ maka $|\sqrt{2x} - 2| < \epsilon$

Dengan mempelajari matematika, diharapkan peserta didik atau mahasiswa dapat berkembang menjadi pribadi yang dapat berpikir kreatif dan kritis. Sebagai pribadi yang kritis dalam mempelajari matematika, akan terpicu menjadi kreatif untuk memperoleh kepastian antara yang benar maupun yang salah. Sehingga, akan berupaya mencari solusi dengan menggunakan berbagai strategi alternatif. (Schneider, 1999). Berpikir kritis menghendaki adanya usaha dan membutuhkan rasa peduli terhadap ketepatan dan kemauan untuk tidak mudah menyerah saat dihadapkan pada tugas-tugas yang sukar. (Sternberg, Roediger, dan Halpren, 2007).

Belajar matematika erat kaitannya dengan kegiatan serta proses belajar dan berpikir. Hal ini terkait dengan ciri khas matematika sebagai suatu ilmu dan aktivitas manusia, yaitu matematika sebagai pengetahuan yang membentuk pola pikir, pola pengorganisasian dalam membuktikan secara logis, penggunaan istilah yang terdefinisikan dengan cermat/baik, jelas dan tepat. Maka dari itu, tanpa mengandalkan dan peningkatan

pembelajaran matematika yang bermutu dan mengarahkan peserta didik (mahasiswa) untuk mau berpikir, maka akan sangat sulit untuk mencapai kemampuan berpikir agar menghasilkan suatu prestasi belajar matematika yang baik.

Walaupun hal ini bukan merupakan sesuatu yang sederhana, namun kemampuan berpikir ini harus dikembangkan dalam pembelajaran matematika di kelas ataupun di luar kelas dengan menganut prinsip *student-centered learning* dan *self-regulated learning*, yaitu pada saat kegiatan belajar, peserta didik (mahasiswa) harus menjadi pribadi yang aktif dalam membentuk pengetahuan, dapat memutuskan sendiri proses belajarnya, memilih pengalaman belajar dan pengetahuan pokok yang hendak dicapainya. Mereka perlu terus didorong untuk berlatih berpikir dalam mempelajari matematika.

Hambatan ataupun kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam mempelajari matematika, dapat diketahui antara lain dari hasil pengerjaan soal tes atau tugas yang diberikan. Hambatan atau kesulitan itu diperlihatkan oleh adanya kesalahan yang dibuat dari jawaban yang diberikannya. Jika peserta didik (mahasiswa) mengalami hambatan maka dia akan melakukan kesalahan (Depdikbud, 1982). Hal ini menunjukkan bahwa hambatan adalah penyebab dari kesalahan. Dalam menjawab soal tes atau tugas yang diberikan, dapat dibedakan atas beberapa hal antara lain: kesalahan dalam penggunaan data, kesalahan dalam menginterpretasi bahasa, kesalahan dalam penggunaan teori dan konsep, kesalahan teknis, penyelesaian tidak tepat, dan penarikan kesimpulan yang nilai logikanya tidak sah. (Hadar, Zalovsky, dan Inbar, 1987).

Kesulitan belajar dapat dipandang berdasarkan akademik dan perkembangan. Secara akademik, kesulitan belajar mahasiswa dapat diketahui dari kegagalan mereka dalam menampilkan beberapa kemampuan akademik yang diharapkan. Kegagalan tersebut meliputi penguasaan kecaapan berbahasa, menulis dan berhitung (matematika). Sedangkan kesulitan belajar yang berkaitan dengan perkembangan kerap muncul sebagai kesulitan yang disebabkan oleh kurang menguasai keterampilan prasyarat (*prerequisite skills*), yaitu keterampilan yang wajib dikuasai terlebih dahulu agar dapat menguasai keterampilan selanjutnya. (Abdurrahman, 2003; Hudoyo, 2005).

2. METODOLOGI

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mengeksplorasi jenis kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa program studi pendidikan matematika FKIP Untan dalam mengikuti

perkuliahan kalkulus diferensial. Karena itu, penelitian ini termasuk dalam bentuk kualitatif (Bogdan & Taylor dalam Moleong, 2010).

Subyek dari penelitian ini yaitu 25 orang mahasiswa reguler semester awal program studi pendidikan matematika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Tanjungpura tahun akademik 2018/2019 yang memprogramkan mata kuliah kalkulus diferensial.

Untuk mendapatkan data tentang kesulitan mahasiswa dan hambatan belajarnya dalam mempelajari materi pada kalkulus diferensial, dilakukan dengan teknik tes tertulis (*paper and pencil*) dan teknik komunikasi (wawancara). Dalam hal ini, proses pengumpulan data diawali dengan proses pemberian tes untuk mendapatkan data mengenai kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan soal yang menyangkut penentuan himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan (terutama bentuk rasional) dan menentukan nilai limit dari suatu fungsi di titik tertentu serta pembuktiannya. Selanjutnya dilakukan wawancara kepada enam orang mahasiswa tertentu yang dipilih sesuai kebutuhan untuk menggali dan mendapatkan data yang akurat mengenai hambatan yang dialami dalam menyelesaikan soal yang diberikan. Sehubungan dengan itu maka alat pengumpul data (instrumen) dalam penelitian ini yaitu peneliti sendiri (sebagai instrumen utama), pedoman wawancara, dan tes. Lingkup materi yang diujikan dalam tes

adalah materi terpilih yang dilingkupi oleh mata kuliah kalkulus diferensial yang bersumber dari buku kalkulus jilid 1 edisi ke-empat (Purcell & Varberg, 1991). Mempertimbangkan adanya keterbatasan waktu, maka pada penelitian ini, materi yang akan dikaji hanya mencakup masalah pertidaksamaan, limit, dan turunan.

Analisis data dilaksanakan selama dan pasca pengumpulan data. Artinya, analisis data penelitian ini dilakukan dalam suatu proses yang sudah dimulai sejak pengumpulan data melalui tahap (a) transkripsi dan reduksi, (b) klasifikasi dan identifikasi, dan (c) tahap penyimpulan.

Kepada subyek diberikan soal tes tertulis untuk mendapatkan cara mereka menyelesaikan soal/masalah yang terkait materi kalkulus diferensial. Selanjutnya beberapa subyek terpilih akan diwawancarai untuk mendapatkan data mengenai kesulitan dan hambatan (epistemologis) yang dialaminya.

Terdapat tiga prosedur dalam penelitian ini. Tahap pertama: menelaah bahan, menyiapkan alat dan instrumen penelitian (pengembangan dan standarisasi instrumen). Tahap kedua: Memberikan tes dan mengkoreksi hasil tes serta mencermati jawaban yang diberikan (khususnya jawaban yang salah). Tahap ketiga: melakukan wawancara untuk mengungkap kesulitan dan hambatan (epistemologis) mahasiswa yang dilakukan secara klinis terhadap beberapa orang subyek yang dipilih secara *purposive*. Selanjutnya dilakukan proses penyimpulan dan pembuatan laporan penelitian.

3. PEMBAHASAN

Ketika menjalani proses pembelajaran sebagai ikhtiar untuk mendapatkan ilmu pengetahuan, tidak jarang seorang individu (peserta didik) menemui rintangan atau kendala. Secara alamiah, seorang peserta didik (mahasiswa) sebagai pelajar mungkin mengalami situasi tersebut. Situasi seperti itu disebut hambatan belajar (*Learning obstacle*). Di antara hambatan tersebut yaitu hambatan didaktis, hambatan kognitif, hambatan genetik dan psikologis, dan hambatan epistemologis. Cornu (1991) mengungkapkan bahwa hambatan kognitif terjadi saat seorang mahasiswa mengalami kesulitan belajar, hambatan genetik dan psikologi terjadi akibat perkembangan individu mahasiswa, hambatan didaktis terjadi karena perlakuan proses perkuliahan yang dilakukan oleh dosen, dan hambatan epistemologis terjadi akibat konsep matematika itu sendiri.

Selanjutnya, Brousseau (2002) menyatakan bahwa hambatan-hambatan (*obstacles*) belajar tersebut dapat dipengaruhi oleh berbagai faktor, yakni *obstacle of ontogenic origin* (kesiapan mental belajar), *obstacle of didactical origin* (akibat sistem pendidikan) dan *obstacle of epistemological origin* (pengetahuan mahasiswa yang mempunyai konteks penerapan yang terbatas). Hambatan ontogeni (*obstacle of ontogenic origin*) terjadi karena proses pembelajaran yang tidak sejalan dengan kesiapan peserta didik. Maka dari itu, hambatan ontogeni berkaitan erat dengan perkembangan mental mahasiswa yang dikaitkan dengan faktor usia dan tingkat perkembangannya. Hambatan yang timbul hanya karena perkembangan mental yang lambat dan bukan diakibatkan oleh penyakit bawaan, maka hambatan itu akan hilang dengan sendirinya seiring dengan pertumbuhan mahasiswa tersebut. Hambatan didaktis (*obstacle of didactical origin*) adalah hambatan yang terjadi karena kekeliruan dalam proses pembelajaran yang berasal dari sistem

pembelajaran yang diterapkan. Sedangkan hambatan epistemologis (*obstacle of epistemological origin*), yakni hambatan yang terjadi karena pengetahuan seseorang terbatas pada konteks tertentu. Apabila seseorang menghadapi konteks yang berbeda, maka pengetahuan tersebut menjadi tidak dapat digunakan atau dia mengalami ketidaktahuan saat menggunakannya. Dalam hal ini, pandangan terhadap konsep satu dengan konsep-konsep lainnya terpisah-pisah dan tidak komprehensif.

Duroux (dalam Brousseau, 2002) menjelaskan bahwa hambatan epistemologis bukan merupakan hambatan atau kurangnya pengetahuan yang dipunyai oleh seseorang akan tetapi suatu bagian dari pengetahuan atau konsepsi yang memberikan hasil yang benar saat dijadikan konteks yang sudah dikenal, akan tetapi memberikan hasil yang salah saat digunakan dalam konsep baru yang membutuhkan perspektif yang berbeda untuk menyelesaikannya.

Dalam penelitian ini, hasil yang ingin dicapai adalah diketahuinya kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa pendidikan matematika di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan - Universitas Tanjungpura, khususnya mahasiswa yang masih berada pada tingkat awal dalam memahami konsep dasar matematika, terutama yang berkenaan dengan perkuliahan kalkulus diferensial. Materi perkuliahan kalkulus diferensial yang menjadi topik kajian dalam penelitian ini adalah materi pertidaksamaan dan limit.

Berdasarkan jawaban mahasiswa yang menjadi subyek penelitian terhadap soal tes yang diberikan, diperoleh hasil sebagai berikut.

- a. Untuk soal yang menyangkut suatu pertidaksamaan yang berbentuk rasional, mahasiswa diminta untuk menentukan himpunan penyelesaiannya dalam bentuk penulisan selang interval dan grafik. Dari tiga soal yang diberikan; untuk soal 1(a), 11 orang (44%) menjawab dengan benar dan 14 (56%) orang memberikan jawaban yang salah. Untuk soal 1(b) 8 orang (32%) menjawab dengan benar, dan 17 orang (68%) memberikan jawaban yang salah. Untuk soal 1(c) 9 orang (36%) yang menjawab dengan benar dan 16 orang (64%) memberikan jawaban yang salah.
- b. Untuk soal yang menyangkut limit dan pembuktiannya, dari tiga soal yang diberikan, hampir sebagian besar mahasiswa dapat menentukan nilai limit dari soal yang diberikan. Di sini, Untuk soal 2(a) 19 orang (76%) dapat menentukan nilai limit dari soal yang diberikan, dan hanya 6 orang (24%) yang masih salah. Untuk soal 2(b) 23

orang (92%) dapat menjawab dengan benar, dan hanya 2 orang (8%) yang memberikan jawaban salah. Untuk soal 2 (c) 19 orang (76%) dapat memberikan jawaban yang benar, dan 6 orang saja (24%) yang memberikan jawaban salah.

- c. Sedangkan untuk melakukan pembuktian mengenai kebenaran nilai limit menggunakan bukti $\varepsilon - \delta$, ternyata sebagian besar mahasiswa yang menjadi subyek penelitian ini tidak bisa memberikan bukti dengan akurat. Dalam hal ini, yang dapat memberikan bukti dengan benar hanya 3 orang mahasiswa saja (12%). Selebihnya, 22 orang (88%) tidak mampu memberikan pembuktian dengan benar (termasuk tidak memberikan jawaban).
- d. Untuk mencari turunan menggunakan turunan rantai dan dengan menggunakan operator D, semua subyek dapat menyelesaikannya dengan baik.

Secara ringkas, hasil penilaian terhadap jawaban mahasiswa untuk soal tes yang diberikan, dapat dirangkum seperti pada tabel 4.1.

Mencermati data hasil pekerjaan mahasiswa yang dipaparkan di atas, jelas bahwa pada materi pertidaksamaan yang berbentuk rasional, terutama untuk variabel termuat pada bagian penyebut, dan pembuktian limit menggunakan definisi $\varepsilon - \delta$, ternyata lebih dari separuh mahasiswa masih mengalami masalah. Hal ini mengindikasikan bahwa masih banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan ataupun hambatan dalam memahaminya.

Diakui bahwa setiap individu (mahasiswa) mempunyai ciri khas masing-masing. Perbedaan ciri khas dapat terlihat dari perilaku, semangat, dan juga kegiatan belajarnya. Pada beberapa individu, mereka sangat bersemangat untuk belajar, sementara yang lain mungkin memiliki antusiasme yang sangat kecil ketika belajar. Demikian pula dalam hal menerima pelajaran, ada yang mudah menerima pelajaran ada pula yang sulit dalam menerima pelajaran. Kesulitan yang dialami mahasiswa dapat dicermati dari kesalahan yang dilakukan pada saat menjawab permasalahan (soal tes). Dari jawaban terhadap soal tes yang diberikan, dapat diidentifikasi beberapa model jawaban salah yang dibuat oleh mahasiswa.

Tabel 4.1. Persentase Hasil Penilaian Jawaban Mahasiswa

Soal	Jawaban Mhs	
	Benar (B)	Salah (S)
1. Menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut serta menuliskannya dalam cara penulisan selang dan grafik.	11 (44%)	14 (56%)
(a) $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$		
(b) $\frac{3}{x+5} > 2$	8 (32%)	17 (68%)
(c) $\frac{7}{2x} < 3$	9 (36%)	16 (64%)
2. Mencari nilai limit		
(a) $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2+6u-7}{u^2-1}$	19 (76%)	6 (24%)
(b) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1}$	23 (92%)	2 (8%)
(c) $\lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - 4x + 3$	19 (76%)	6 (24%)
3. Pembuktian Limit soal no 3	3 (12%)	22 (88%)
4. Mencari turunan	25 (100%)	0

Ragam model jawaban salah yang diberikan oleh mahasiswa untuk masing-masing jenis soal adalah sebagai berikut.

Soal 1.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut sertatulis dalam cara penulisan selang dan grafik.

(a) $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$

Jawaban:

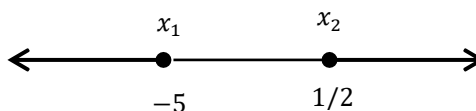
i. Model Jawaban Pertama (MJPT-1A1)

Kita ibaratkan

$$\begin{aligned} x_1 &= x + 5 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x - 1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 2x - 1 \\ x + 2x &\leq -1 - 5 \\ -x &\leq -6 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$



$$x_1 = (-5, -\infty)$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

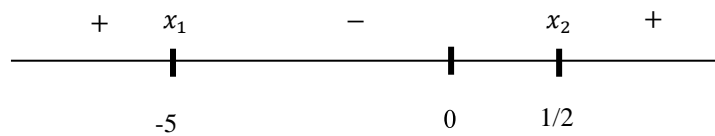
$$HP = \left\{ x \mid x - 5 \leq 0 \leq \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

ii. Model Jawaban Kedua (MJPT-1A2)

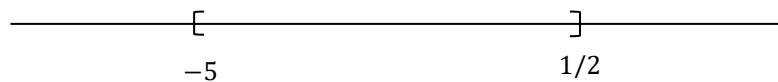
$$\frac{x + 5}{2x - 1} \leq 0$$

$$\frac{x + 5}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

Untuk $x + 5 = 0$, maka $x = -5$. Untuk $x - \frac{1}{2} = 0$, maka $x = \frac{1}{2}$



$$HP = \left[-5, \frac{1}{2}\right] = \left\{ x \mid x - 5 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

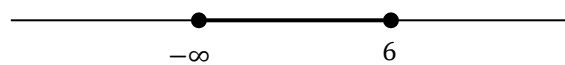


iii. Model Jawaban Ketiga (MJPT-1A3)

$$\frac{x + 5}{2x - 1} \leq 0$$

$$x + 5 \leq 2x - 1$$

$$6 \leq x$$



$$HP = \{-\infty, \infty\}$$

iv. Model Jawaban Keempat (MJPT-1A4)

$$\frac{x + 5}{2x - 1} \leq 0$$

$$\frac{x + 5}{2x - 1} + \frac{2x - 1}{2x - 1} \leq 0 + \frac{2x - 1}{2x - 1}$$

$$x \leq -5$$

$$HP = \{-\infty, -5\}$$

(b) $\frac{3}{x+5} > 2$

Jawaban:

i. Model Jawaban Pertama (MJPT-1B1)

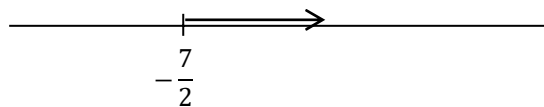
$$\begin{aligned} \frac{3}{x+5} &> 2 \\ \frac{3}{x+5} - 2 &> 0 \\ \frac{3}{x+5} - 2 \frac{x+5}{x+5} &> 0 \\ \frac{3 - 2x + 10}{x+5} &> 0 \\ -2x + 13 = 0 & \qquad \qquad \qquad x + 5 = 0 \\ -2x = -13 & \qquad \qquad \qquad x_2 = -5 \\ x_1 = 13/2 & \end{aligned}$$

HP = (-5, 13/2)

ii. Model Jawaban Pertama (MJPT-1B2)

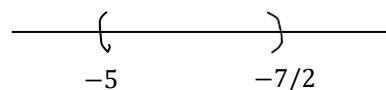
$$\begin{aligned} \frac{3}{x+5} &> 2 \\ 3 &> 2(x+5) \\ 2x + 10 &< 3 \\ 2x &< -7 \\ x &< -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Jadi HP = (-7/2, ∞)

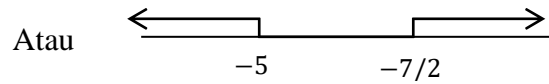


iii. Model Jawaban Pertama (MJPT-1B3)

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+5} - 2 &> 0 & \frac{3 - 2x - 10}{x+5} &> 0 \\ \frac{3}{x+5} + \frac{-2(x+5)}{x+5} &> 0 & \frac{-2x - 7}{x+5} &> 0 \\ \text{Untuk } -2x - 7 = 0 & \qquad \qquad \qquad , & x + 5 = 0 & \\ -2x = 7 & & x_2 = -5 & \\ x_1 = -7/2 & & & \end{aligned}$$



Himpunan penyelesaiannya = $(-5, -7/2)$



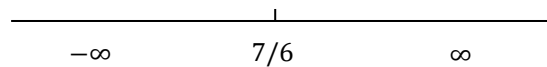
(c) $\frac{7}{2x} < 3$

Jawaban:

i. Model Jawaban Pertama (MJPT-1C1)

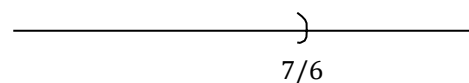
$$\begin{aligned} \frac{7}{2x} &< 3 \\ 7 &< 3(2x) \\ 6x &> 7 \\ x &> 7/6 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai $x > 7/6$ ke persamaan $\frac{7}{2x} < 3$ maka diperoleh daerah antara $-\infty$ dan $7/2$ bernilai positif dan antara $7/5$ dengan ∞ bernilai negatif, sehingga diperoleh HP = $\{-\infty, 7/6\}$ daerah penyelesaian bernilai positif karena ($>$).



ii. Model Jawaban Pertama (MJPT-1C2)

$$\begin{aligned} \frac{7}{2x} &< 3 & \frac{7-6x}{2x} &< 0 \\ \frac{7}{2x} - 3 &< 0 & 7 - 6x &< 0 \\ \frac{7}{2x} - \frac{3(2x)}{2x} &< 0 & -6x &< -7 \\ & & x &< 7/6 \end{aligned}$$



HP = $\{-\infty, 7/6\}$

iii. Model Jawaban Pertama (MJPT-1C3)

$$\begin{aligned} \frac{7}{2x} &< 3 \\ \frac{7}{2x} - 3 &< 0 \\ \frac{7-6x}{2x} &< 0 \end{aligned}$$

Untuk $7 - 6x < 0$, maka $x < 7/6$

Untuk $2x < 0$, maka $x < 0$

Lakukan uji untuk 3 titik, yaitu $(-\infty, 0)$, $(0, 7/6)$, dan $(7/6, \infty)$ sehingga

daerah yang bernilai negatif adalah himpunan penyelesaiannya.
Maka $HP = (-\infty, 0)$ dan $(0, 7/6) = (-\infty, 7/6)$

Sebagai pedoman dalam memberikan koreksi atau penilaian terhadap hasil kerja mahasiswa dalam menjawab soal nomor 1 tersebut, diberikan penyelesaian seperti pada gambar 4.1.

Untuk penentuan nilai limit dari suatu fungsi tertentu yang diberikan pada soal tes sesuai cakupan materi limit pada kalkulus diferensial, ternyata semua mahasiswa yang menjadi subyek penelitian ini dapat menyelesaikannya tanpa ada kendala. Namun demikian, untuk menunjukkan bahwa nilai limit yang telah ditemukannya dengan cara melakukan proses manipulasi aljabar ataupun dengan cara substitusi (khususnya untuk soal fungsi kontinu) ternyata masih banyak (mayoritas) responden mengalami masalah. Hal ini dapat dilihat dari hasil pekerjaannya yang tidak sesuai dengan penyelesaian yang diharapkan.

Selanjutnya, untuk soal yang menyangkut penentuan turunan dari suatu fungsi yang diberikan, baik dengan menggunakan aturan rantai (chain rule) maupun dengan menggunakan operator derivative (operator D), dapat dilakukan dengan baik oleh semua responden. Artinya, untuk menentukan turunan (turunan pertama) dalam konteks ini, mahasiswa tidak mengalami kesulitan ataupun hambatan yang berarti.

Berdasarkan hasil kajian analisa data terhadap jawaban dari soal yang diberikan melalui tes tertulis sesuai lembar jawaban yang dinuat mahasiswa, serta ditambah dengan hasil wawancara yang dilakukan terhadap mahasiswa yang sudah terpilih, dapat diperoleh hasil sebagai berikut.

Frekwensi mahasiswa yang memberikan jawaban salah menurut variasi atau ragam model jawaban yang seperti yang telah dipaparkan tadi, dapat dirangkum dalam tabel 4.2.

Tabel 4.2. Frekwensi Mahasiswa Berdasarkan Model Jawaban Tes

No Soal Tes	Ragam Jawaban	f
1.(a)	MJPT-1A1	2
	MJPT-1A2	11
	MJPT-1A3	1
1.(b)	MJPT-1B1	9
	MJPT-1B2	5
	MJPT-1B3	3
1.(c)	MJPT-1C1	13
	MJPT-1C2	3

Untuk soal nomor 2, 3 dan 4, umumnya dikerjakan dengan cara yang serupa. Khusus untuk pembuktian limit, umumnya dilakukan dengan cara melakukan substitusi ataupun tidak memberikan jawaban. Sedangkan untuk mahasiswa yang bisa membuktikan dengan benar ada 3 orang mahasiswa saja.

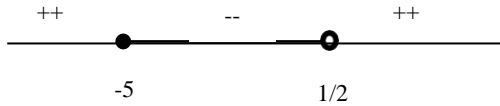
1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut serta tuliskandalam cara penulisan selang dan grafik.

a. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$

Penyelesaian:

Misalkan $x + 5 = 0$ maka $x = -5$ **dan** $2x - 1 = 0$, maka $x = \frac{1}{2}$

Pandang $x = -5$ dan $x = \frac{1}{2}$ adalah titik pemisah, yakni :



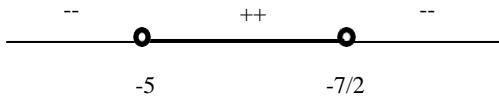
Jadi HP = $[-5, \frac{1}{2})$ --- ambil daerah selang bilangan yang bernilai negatif

b. $\frac{3}{x+5} > 2$

Penyelesaian:

$$\frac{3}{x+5} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2(x+5)}{x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x-10}{x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+5} > 0$$

Cari titik pemisah; yakni $-2x - 7 = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$ **dan** $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$



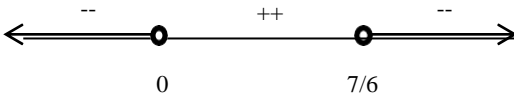
ambil daerah selang bilangan yang bernilai positif. Jadi HP = $(-5, -\frac{7}{2})$

c. $\frac{7}{2x} < 3$

Penyelesaian:

$$\frac{7}{2x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{7-3(2x)}{2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{7-6x}{2x} < 0$$

Cari titik pemisah; yakni $7 - 6x = 0 \rightarrow x = \frac{7}{6}$ **dan** $2x = 0 \rightarrow x = 0$



ambil daerah selang bilangan yang bernilai negatif. Jadi HP = $(-\infty, 0) \cup (\frac{7}{6}, \infty)$

Gambar 4.1. Penyelesaian Soal Pertidaksamaan

Pedoman untuk koreksi penilaian hasil kerja mahasiswa terhadap soal yang menyangkut limit dan pembuktiannya (soal tes nomor 2) dapat dilihat pada gambar 4.2.

Soal 2. Cari limit berikut dan buktikan dengan menggunakan definisi $s - \delta$.

a. $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2+6u-7}{u^2-1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2+6u-7}{u^2-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u+7)(u-1)}{(u-1)(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u+7)}{(u+1)} = 4$$

Bukti:

Berikan $s > 0$ sebarang, akan ditunjukkan bahwa ada δ sedemikian hingga:

$$0 < |u - 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{u^2+6u-7}{u^2-1} - 4 \right| < \varepsilon$$

Analisis:

$$\left| \frac{u^2+6u-7}{u^2-1} - \frac{4(x^2-1)}{u^2-1} \right| = \left| \frac{u+7}{u+1} - \frac{4(u+1)}{u+1} \right| = \left| \frac{-3u+3}{u+1} \right| = \left| \frac{-3(u-1)}{u+1} \right|$$

Kita batasi $|u - 1| < 1$, maka diperoleh $|u + 1| < 3$, sehingga

$$\left| \frac{-3(u-1)}{u+1} \right| < |u - 1| < \delta.$$

Pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$, maka $0 < |u - 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{u^2+6u-7}{u^2-1} - 4 \right| < \varepsilon$.

b. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1}$

Bukti:

Berikan $s > 0$ sebarang, akan ditunjukkan bahwa ada δ sedemikian hingga:

$$0 < |x - 5| < \delta \rightarrow |\sqrt{x - 1} - 2| < \varepsilon$$

Analisis:

$$|\sqrt{x - 1} - 2| = \left| \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2} (\sqrt{x-1} + 2) \right| = \left| \frac{x-1-2}{\sqrt{x-1}+2} \right| < \left| \frac{x-3}{2} \right| = \left| \frac{(x-5)+2}{2} \right| < \frac{1}{2} \delta + 1$$

Pilih $\delta = 2(\varepsilon + 1)$, maka $0 < |x - 5| < \delta \rightarrow |\sqrt{x - 1} - 2| < \varepsilon$.

c. $\lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - 4x + 3$

Bukti:

Berikan $\varepsilon > 0$ sebarang, akan ditunjukkan bahwa ada δ sedemikian hingga:

$$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |(2x^2 - 4x + 3) - 3| < \varepsilon$$

Pilih $\delta = \min\{1, \frac{1}{6}\varepsilon\}$

Gambar 4.2. Cara Menentukan Nilai Limit dan Pembuktiannya

Proses pembuktian yang dilakukan serupa dengan pedoman koreksi yang diberikan seperti pada gambar 4.2.

Berdasarkan jawaban yang diberikan pada lembar jawaban dan wawancara dengan responden terpilih mengenai cara mereka melakukan proses pengerjaan soal pertidaksamaan dan pembuktian limit yang banyak mengalami persoalan, dapat disimpulkan bahwa dalam proses penentuan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaannya dan pembuktian limit, mereka umumnya masih tidak mengerti persyaratan dan juga arah pembuktian yang akan dilakukan. Cuplikan wawancara dengan responden antara lain sebagai berikut.

Untuk penyelesaian soal pertidaksamaan, ketika didalami mengenai bagaimana cara mereka ataupun alasan mereka membuat pengerjaan soal yang diberikan, dapat diketahui bahwa hambatan yang ditemui adalah tidak paham dengan baik mengenai sifat-sifat bilangan (*field properties*) dan juga sifat-sifat urutannya (*order properties*), sehingga sering terabaikan konsep mengenai pembagian bilangan dengan 0 (nol). Cuplikan wawancara terhadap responden terpilih (WRD) adalah sebagai berikut.

- Peneliti (P) : Bagaimana anda menyelesaikan soal $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$?*
WRD : di kalikan saja pak penyebutnya dengan nol, sehingga diperoleh $x + 5 \leq 0$; jadi $x \leq -5$.
Peneliti (P) : Bagaimana dengan penyebutnya?
WRD : Oh iya.... Penyebutnya tidak nol, dan $x \leq \frac{1}{2}$
Peneliti (P) : Lalu... himpunan penyelesaiannya bagaimana?
WRD : (Menulis).... Membuat selang.... Dan melakukan uji Tiba-tiba.... Kita pilih daerah yang negative pak, Jadi $HP = [-5, -1/2)$
Peneliti (P) : Baik lah... terima kasih.

Model jawaban seperti hasil wawancara tersebut dilakukannya juga untuk dua soal berikutnya yang masih menyangkut himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan tetap dilakukan/dikerjakan dengan cara yang serupa.

Sementara untuk memberikan bukti terhadap kebenaran nilai suatu limit, hasil cuplikan wawancara yang dilakukan dapat disajikan sebagai berikut.

- Peneliti (P) : Bisa anda jelaskan apa maksud soal ini? (peneliti menunjuk soal pembuktian limit)*
Mhs 1 : Membukti limitnya
P : Bisa dijelaskan bagaimana caranya?
Mhs 1 : terdiam...
P : Yang anda tulis ini apa? (sambil menunjuk pekerjaannya pada lembar jawaban)
Mhs 1 : Saya masukkan ke dalam rumusnya pak
P : Apakah anda tahu soalnya minta apa?

Mhs 1 : *Buktikan dengan epsilon-delta pak*

P : *Apakah begini caranya?*

Mhs 1 : *terdiam... (lupa pak)*

Berdasarkan hasil pekerjaan dan cuplikan wawancara tersebut, jelas bahwa responden ini tidak mengerti atau tidak tahu definisi limit (tidak paham), dan tidak mengerti apa yang harus ditunjukkan dalam melakukan pembuktian itu. Hal ini berarti bahwa responden masih tidak paham (mengalami hambatan) dalam melakukan proses pembuktian. Hambatannya antara lain karena mereka tidak dapat membaca definisi dengan baik, apalagi dengan menggunakan kata-katanya sendiri.

Demikian pula untuk responden lainnya, ternyata hasil wawancara menunjukkan kendala dan alasan yang serupa. Kendala ini tidak hanya untuk proses pembuktian limit, namun terjadi pula untuk persoalan pertidaksamaan yang berbentuk rasional. Dalam konteks pertidaksamaan yang berbentuk rasional, terutama bila variabelnya termuat pada bagian penyebut, ternyata membuat mahasiswa bingung. Dari hasil wawancara, diketahui bahwa kesalahan terjadi akibat tidak teliti dan senantiasa mengabaikan pembagian dengan 0 (nol). Disamping itu, cenderung dipikiran mereka bahwa variabel yang muncul tidak dipikirkan kalau dia dapat berupa bilangan 0 (nol). Akibatnya, bila berada pada bagian penyebut, maka konsep pembagian dengan nol seringkali terabaikan/luput dari antisipasinya.

Dari hasil kajian analisa data dan wawancara yang dilakukan terhadap 6 orang responden yang terpilih, diperoleh hasil mengenai kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa. Kesulitan Belajar Mahasiswa adalah: Tidak dapat menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan yang berbentuk rasional dan penyebutnya mengandung variabel; Tidak mengerti macam-macam cara melakukan pembuktian; Tidak mengerti apa yang akan dibuktikan (tidak paham masalah); Tidak mampu melakukan analisa rasional terhadap masalah yang dihadapi; Lemah dalam pemahaman konsep/definisi dari materi yang dipelajari; Tidak mengenali masalah yang perlu dipisah menjadi beberapa kasus; Kurang memahami secara baik tentang sifat-sifat medan (*field properties*), dan sifat urutan (*order properties*) pada sistem bilangan real. Umumnya hanya hapal semata, sehingga tidak mampu untuk mengaplikasikannya dalam situasi lain; Tidak terampil membaca suatu definisi ataupun pernyataan matematis yang berbentuk simbolik (bahasa simbolik). Sedangkan hambatan belajarnya ditinjau dari aspek epistemologis, yaitu: Tidak mampu melakukan penalaran bahwa $x \geq 0$ dapat berarti $x > 0$ atau $x < 0$, sehingga masalah

tidak terelaborasi dengan benar; Tidak paham bahwa melakukan perkalian dengan variabel x dapat mempengaruhi kebenaran dari suatu pertidaksamaan. Mereka tidak menyadari bahwa x dapat bernilai positif, negatif, atau nol; Tidak cermat ketika memanipulasi bentuk aljabar yang melibatkan pembagian dengan nol; Lupa atau lalai dalam mencermatibahwa bentuk aljabar yang melibatkan pembagian dengan nol adalah tidak terdefinisi; Tidak cermat dalam menyikapi makna disjungsi dan konjungsi dari suatu pernyataan (lemah dalam logika matematika); Tidak mampu/tidak paham untuk mengelaborasi suatu bentuk aljabar yang melibatkan pertidaksamaan yang berbentuk rasional; Sering menganggap/memperlakukan bentuk variabel x dalam ekspresi aljabar sebagai bilangan biasa dan dianggap tidak nol; Kurangmemahami secara baik tentang sifat-sifat medan (*field properties*), dan sifat urutan (*order properties*) pada sistem bilangan real. Umumnya hanya hapal semata, sehingga tidak mampu untuk mengaplikasikannya dalam situasi lain; Menganggap pembuktian sebagai upaya memberikan contoh; Mudah frustrasi dalam menghadapi masalah (cenderung bersikap malas); Tidak mengerti makna dari simbol matematis yang digunakan.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis terhadap data yang didapatkan dari tes dan wawancara terhadap responden terpilih, dapat diidentifikasi/dideskripsikan mengenai kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa sebagai berikut.

Kesulitan belajar yang dialami mahasiswa yakni:

- Kesulitan dalam menyelesaikan suatu pertidaksamaan yang berbentuk rasional (terutama yang penyebutnya mengandung variabel).
- Tidak paham apa yang akan dibuktikan (tidak paham masalah)
- Tidak mampu melakukan analisa rasional terhadap masalah yang dihadapi
- Lemah dalam pemahaman konsep/definisi dari materi yang dipelajari.
- Tidak mampu mengenali pemisahan adanya beberapa kasus dari soal
- Kurang memahami secara baik tentang sifat-sifat medan (*field properties*), dan sifat urutan (*order properties*) pada sistem bilangan real. Umumnya hanya hapal semata, sehingga tidak mampu untuk mengaplikasikannya dalam situasi lain.

- Tidak paham membaca suatu definisi ataupun pernyataan matematis yang berbentuk simbolik (bahasa simbolik)

Hambatan belajar Mahasiswa, yakni:

- Tidak mampu melakukan penalaran bahwa $x \in \mathbb{R}$ dapat berarti $x > 0$ atau $x < 0$, sehingga masalah tidak terelaborasi dengan benar.
- Tidak paham bahwa melakukan perkalian dengan variabel x dapat mempengaruhi kebenaran dari suatu pertidaksamaan. Mereka tidak menyadari bahwa x dapat bernilai positif, negatif, atau nol.
- Tidak cermat memanipulasi bentuk aljabar untuk pembagian nol.
- Lemah dalam menalar makna disjungsi dan konjungsi dari suatu pernyataan (lemah dalam logika matematika).
- Tidak mampu/tidak paham untuk mengelaborasi suatu bentuk aljabar yang melibatkan pertidaksamaan yang berbentuk rasional.
- Sering menganggap/memperlakukan variabel (x) dalam ekspresi aljabar sebagai bilangan biasa dan tidak nol.
- Kurang memahami secara baik tentang sifat-sifat medan (*field properties*), dan sifat urutan (*order properties*) pada sistem bilangan real. Umumnya hanya hapal semata, sehingga tidak mampu untuk mengaplikasikannya dalam situasi lain.
- Menganggap pembuktian sebagai upaya memberikan contoh.
- Mudah frustrasi dalam mengatasi permasalahan (cenderung bersikap malas).
- Tidak memahami arti dari simbol matematis yang digunakan.

Pengkajian penelitian semacam ini perlu dilakukan secara terus menerus (penelitian *longitudinal*) untuk mendapatkan kerangka dasar kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa dalam mempelajari matematika dasar (khususnya kalkulus). Lebih lanjut, diperlukan pengembangan desain perkuliahan (desain pedagogik) yang dapat memfasilitasi kesulitan dan hambatan belajar mahasiswa berdasarkan hasil penelitian ini. Dengan demikian, diharapkan tercipta kualitas perkuliahan ataupun kualitas kompetensi profesional dan pedagogik mahasiswa yang semakin baik.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Abdurrahman, Mulyono. (2003). *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*. Jakarta: PT. Rineka Cipta.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (Balacheff, N. M., Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) (1st ed., Vol. 19). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Cornu, B. (1991) 'Limits'. In Tall, D (ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp 153-166.
- Depdikbud (1982). *Diagnostik Kesulitan Belajar dan Pengajaran Remedial*. Jakarta : Depdikbud.
- Hadar, N.M., Zaslowsky, O., dan Inbar S. (1987). An Empirical Clasification Model for Error in Hight School Mathematics. *Journal for Research and Mathematics Education*. 18 (1).
- Hudoyo, Herman. (2005). *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Kieran, C. (1985). Constructing meaning for Equations and equation-solving, In A. Bell., B. Low & J. Kilpatrick (Eds.). *Theory, Research & Practice in Mathematical Education*, 243-248, University of Nottingham, UK: Shell Center for Mathematical Education.
- Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In Nunes T., Bryan P., (Eds.). *Learning and Teaching Mathematics; An International Perspective*. Psychology Press, 133-162.
- Kuchemann, D.E. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics*, 102-119. London: Murray.
- Margiyono, Iis., Mampouw, Helti Lygia (2011) . Deskripsi Pedagogical Content Knowledge Guru Pada Bahasan Tentang Bilangan Rasional, *Proceeding. International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education*. Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University, Yogyakarta, July 21-23 2011.
- Mirza, Ade. (2018). Analisis Kesalahan Yang Dibuak Mahasiswa Pendidikan Matematika FKIP Untan Pada Materi Pertidaksamaan Yang Melibatkan Harga Mutlak Dan Limit Fungsi. *Laporan Penelitian*. Pontianak: FKIP Universitas Tanjungpura.

- Moleong, Lexy J. (2010). *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Jakarta : RemajaRosdakarya.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- OECD (2005). *The definition and selection of key competencies: Executive Summary*. Retrieved 31 December, 2015 from <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>
- Purcell, E.J., Varberg, Dale (1991) *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi Keempat. Alih bahasa Oleh : I Nyoman Susila, Bana Kartasmita, dan Rawuh. Jakarta : Erlangga
- Schneider, D.J. (1999). The Belief Machine. In English, 1999. *Mathematical Thinking and Learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publisher.
- Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sternberg, R.J., Roediger, H.L., dan Halpren, D.F. (2007). *Critical Thinking in Psychology*. Cambridge: University Press.
- Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22 II, 125-147.
- Toh P. Choon & Kaur, B. (2016). Developing 21st Century Competencies In The Mathematics Classroom. *Yearbook 2016*, Association of Mathematics Educators. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Zhang, B. 2003. Using student centered teaching strategies in calculus. In M. Peat (ed.) *The China Papers: Tertiary Science and Mathematics Teaching for the 21st Century*, 2: 100-103
- Zhou Yuan, 2002. Improving the qualities of teaching calculus - by modern education theories and modern technology, In M. Peat (ed.) *The China Papers: Tertiary Science and Mathematics Teaching for the 21st Century*, 1: 23-27.