

**BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI DAN KETERHUBUNGAN
PELANGI KUAT pada GRAF $K_m \odot C_n$ dan GRAF $K_m \odot W_n$**

***RAINBOW CONNECTION AND STRONG RAINBOW CONNECTION NUMBER of
GRAPH $K_m \odot C_n$ and GRAPH $K_m \odot W_n$***

Hirawati Lubis^{1)*}, Kiki Ariyanti Sugeng²⁾, dan Denny Silaban²⁾,

¹⁾ Universitas Pamulang Serang

*dosen10114@unpam.ac.id

²⁾ Universitas Indonesia Depok

ABSTRACT

A rainbow path is edge on a graph where each vertex is coloured differently. The rainbow connection number in graph G , symbolized as $rc(G)$, is the minimum colour needed to colour the vertex in a path on graph G so that a path connects each pair of vertices with a different colour. The $u - v$ geodesic rainbow path in G is a rainbow path whose length is equal to $d(u, v)$ where $d(u, v)$ is the distance between u and v . A graph G is said to have strong rainbow connectivity $src(G)$ if the $u - v$ geodesic for two vertices u and v in G is a rainbow path. The strong rainbow connection number $src(G)$ is the minimum number of colours needed to make G a strong rainbow connection. Let G_1 be a graph with $|V(G_1)| = q_1$. A corona $G_1 \odot G_2$ of two graphs G_1 and G_2 is a graph obtained by taking one copy of graph G_1 and q_1 a copy of G_2 , and then at the i th vertex of G_1 , it is linked to each vertex of the i th copy of G_2 . This research includes the results of a study of rc and src in the graphs $K_m \odot C_n$, and $K_m \odot W_n$.

Keywords: *Rainbow Connectivity, corona, $K_m \odot C_n$, and $K_m \odot W_n$*

ABSTRAK

Lintasan pelangi merupakan lintasan pada sesuatu graf yang setiap busurnya diwarnai dengan warna berbeda. Bilangan keterhubungan pelangi pada graf G ataupun dapat disimbolkan $rc(G)$ adalah warna minimal yang dibutuhkan untuk memberikan warna busur-busur di suatu lintasan pada graf G sehingga setiap pasang simpul dihubungkan oleh suatu lintasan dengan warna yang berbeda. Lintasan pelangi $u - v$ geodesic di G adalah lintasan pelangi yang panjangnya sama dengan $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ merupakan jarak antara u dan v . Graf G dikatakan memiliki keterhubungan pelangi kuat $src(G)$ jika geodesic $u - v$ untuk dua simpul u dan v di G adalah lintasan pelangi. Bilangan keterhubungan pelangi kuat $src(G)$ merupakan banyaknya pewarnaan minimum yang dibutuhkan untuk membuat G terhubung pelangi kuat. Misalkan G_1 adalah graf dengan $|V(G_1)| = q_1$. Suatu korona $G_1 \odot G_2$ dari dua graf G_1 dan G_2 adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf G_1 dan q_1 salinan dari G_2 , kemudian pada simpul ke- i dari G_1 dikaitkan, ke setiap simpul salinan ke- i dari G_2 . Pada penelitian ini meliputi hasil kajian tentang rc dan src pada graf $K_m \odot C_n$, dan $K_m \odot W_n$.

Kata kunci: *Keterhubungan Pelangi, korona, $K_m \odot C_n$, dan $K_m \odot W_n$*

1. PENDAHULUAN

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas himpunan tak kosong $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut himpunan simpul, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang disebut himpunan busur. (Dickson, 2006)

Jalan uv di graf G adalah barisan simpul dan busur di G yang dimulai dari u dan berakhir di v , sehingga simpul-simpul dan busur-busur yang saling berurutan saling bertetangga. Banyaknya busur pada jalan disebut panjang. Jarak dari dua simpul u dan v di G adalah panjang jalan terpendek yang menghubungkan simpul u dan v . Diameter dari suatu graf G , ditulis $diam(G)$, adalah jarak maksimum dari sembarang dua simpul pada graf terhubung G . Lintasan $-uv$ adalah jalan dimana setiap busurnya hanya dilalui satu kali. Suatu lintasan $-uv$ terpendek antara simpul u dan simpul v di G disebut *geodesic* antara u dan v (Sugeng, Slamet, & Silaban, 2017; (AFOSR 70-1153 TR CO o GRAPH THEORY I HARARY, t.t.).

Salah satu topik yang menarik dan sedang banyak dikembangkan pada teori graf adalah pewarnaan graf. Terdapat tiga jenis pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan simpul (*vertex coloring*), pewarnaan busur (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*face coloring*). Pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah dibedakan.

Misalkan graf G adalah graf terhubung tak *trivial* dan k adalah bilangan positif, didefinisikan pewarnaan busur $c: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, sehingga setiap dua busur yang bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Lintasan $u - v$ di G dikatakan lintasan pelangi jika tidak ada dua busur pada lintasan diwarnai dengan warna yang sama. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika setiap dua simpul yang berbeda di G dihubungkan oleh lintasan pelangi. Dalam hal ini, pewarnaan pada graf G disebut pewarnaan pelangi. Jika warna yang digunakan untuk mewarnai graf G dengan pewarnaan pelangi adalah sebanyak k warna, maka pewarnaannya disebut pewarnaan- k pelangi. Bilangan k terkecil sehingga pewarnaan graf G dengan k warna menghasilkan pewarnaan pelangi disebut bilangan keterhubungan pelangi pada graf G , dilambangkan dengan $rc(G)$. Suatu pewarnaan pelangi yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan pewarnaan pelangi minimum (Chartrand dkk., 2008)

Misalkan c adalah pewarnaan pelangi dari graf terhubung G . Untuk dua titik u dan v di G , *geodesic* pelangi $u - v$ pada G adalah lintasan pelangi $u - v$ yang panjangnya sama dengan $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v di G . Graf G dikatakan terhubung pelangi kuat jika G memiliki suatu *geodesic* pelangi $u - v$ untuk setiap dua simpul u dan v di G . Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan pewarnaan pelangi kuat di G . Nilai k terkecil sehingga terdapat pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah terhubung pelangi kuat dikatakan bilangan keterhubungan pelangi kuat di G , $src(G)$. Suatu pewarnaan pelangi kuat di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan pewarnaan pelangi kuat minimum di G . Jadi, $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G . Selanjutnya, jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan banyak busur m , maka $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ (Chartrand dkk., 2008)

Dari hasil studi literatur, banyak sekali hasil penelitian tentang bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat yang telah diketahui, seperti untuk graf lintasan, graf lengkap, graf lingkaran, graf roda, graf pohon, dan lain-lain. (Chartrand dkk., 2008) Pada penelitian ini, akan diteliti bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf yang berawal dari graf lolipop $L_{m,n}$, kemudian dikembangkan menjadi graf korona yang mana pusat grafnya merupakan graf lengkap seperti graf kristal ($K_m \odot (P_m \odot \overline{K_2})$), graf dendrit ($K_m \odot T_n$), graf $K_m \odot C_n$, dan graf $K_m \odot W_n$. Graf lolipop $L_{m,n}$ adalah graf lengkap dengan m simpul yang salah satu simpulnya dikaitkan dengan graf lintasan dengan n simpul.

1.1 Bilangan Keterhubungan Pelangi dan Keterhubungan Pelangi Kuat Dari Graf K_m , C_n , dan W_n

Berikut ini proposisi yang membahas tentang bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat dari graf K_m , C_n , dan W_n .

Proposisi 1. Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial yang berukuran m , maka:(Chartrand dkk., 2008)

- $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap,
- $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$

Bukti.

1. Akan dibuktikan a. Jika G adalah graf lengkap, maka semua busur pada G dapat diwarnai dengan 1 warna. Karena setiap pasang simpul di G bertetangga, maka ada pewarnaan pelangi dengan 1 warna untuk setiap pasang simpul di G . Karena busur

yang mengaitkan setiap pasang simpul di G merupakan *geodesic* antara sepasang simpul di G maka pewarnaan dengan 1 warna ini juga merupakan pewarnaan pelangi kuat di G , $src(G) = 1$. Sebaliknya, jika G bukan graf lengkap, maka pada G terdapat dua simpul u dan v yang tidak bertetangga. Sehingga setiap lintasan $u - v$ *geodesic* memiliki panjang paling sedikit 2, sehingga $src(G) \geq 2$.

2. Untuk membuktikan b. Asumsikan $rc(G) = 2$ dan $src(G) \geq 2$ (berdasarkan bukti 1). Karena $rc(G) = 2$, busur-busur pada graf G dapat diwarnai dengan 2 warna sehingga untuk setiap pasang simpul pada G terdapat lintasan pelangi. Sehingga graf tersebut merupakan graf terhubung oleh lintasan pelangi yang memiliki panjang 2. Maka lintasan tersebut adalah lintasan *geodesic*, sehingga didapat $src(G) = 2$. Dengan kata lain, jika $src(G) = 2$, maka $rc(G) \leq 2$ (karena setiap pewarnaan pelangi kuat adalah pewarnaan pelangi). Dengan kata lain, karena $src(G) = 2$ (sesuai Proposisi 1.a), G bukan graf lengkap dan $rc(G) \geq 2$. Maka $rc(G) = 2$.

Proposisi 2. Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 4$, $rc(C_n) = src(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Chartrand dkk., 2008)

Bukti.

Misalkan $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$ dan untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq n$, misalkan $e_i = v_i, v_{i+1}$. Akan ditinjau dua kasus, yaitu n genap dan n ganjil.

Kasus 1. n genap. Karena genap, maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat $k \geq 2$. Dengan demikian $src(C_n) \geq rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$. Sebaliknya karena pewarnaan busur c_0 dari C_n yang didefinisikan oleh $c_0(e_i) = i$ untuk $1 \leq i \leq k$ dan $c_0(e_i) = i - k$ jika $k + 1 \leq i \leq n$ adalah pewarnaan pelangi dengan k -warna, maka $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k$, sehingga diperoleh $rc(C_n) = src(C_n) = k$. ■

Kasus 2. n ganjil. Karena n ganjil, maka $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat $k \geq 2$. Pertama mendefinisikan pewarnaan busur c_0 dari C_n oleh $c_1(e_i) = i$ untuk $1 \leq i \leq k + 1$ dan $c_1(e_i) = i - k - 1$ jika $k + 2 \leq i \leq n$. Karena c_1 adalah pewarnaan pelangi kuat dengan $(k + 1)$ warna dari C_n , maka $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k + 1$.

Karena $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$, maka $rc(C_n) = k$ atau $rc(C_n) = k + 1$. Klaim, $rc(C_n) = k + 1$. Asumsikan, sebaliknya, bahwa $rc(C_n) = k$. Misalkan c' adalah pewarnaan pelangi dengan k warna di C_n dan misalkan u dan v adalah dua simpul dengan jarak terbesar pada C_n yang tidak bertetangga. Maka lintasan $u - v$ *geodesic* di C_n adalah

lintasan pelangi dan lintasan $u - v$ yang lain di C_n bukan lintasan pelangi karena memiliki jarak $k + 1$. Andaikan, tanpa mengurangi perumuman, bahwa $c'(v_{k+1}v_{k+2}) = k$.

Pandang simpul v_1, v_{k+1} , dan v_{k+2} . Karena lintasan $v_1 - v_{k+1}$ *geodesic* $P: v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ adalah lintasan pelangi dan lintasan $v_1 - v_{k+2}$ *geodesic* $Q: v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{k+2}$ adalah lintasan pelangi, beberapa busur di P dan Q dapat diwarnai dengan warna k . Karena $v_2 - v_{k+2}$ merupakan lintasan *geodesic*, v_2, v_3, \dots, v_{k+2} adalah lintasan pelangi, maka $c'(v_1v_2) = k$. Dengan cara yang sama, $v_n - v_{k+1}$ *geodesic* $Q: v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}$ sehingga $c'(v_n v_1) = k$, diperoleh $c'(v_1v_2) = c'(v_n v_1) = k$. Hal ini berarti tidak terdapat lintasan pelangi pada lintasan $v_2 - v_n$ di G . Hal ini kontradiksi dengan c' adalah suatu pewarnaan pelangi dengan k warna. Jadi, haruslah $rc(C_n) = src(C_n) = k + 1$. ■

Proposisi 3. untuk $n \geq 4$, bilangan keterhubungan pelangi dari graf roda W_n adalah (Chartrand dkk., 2008)

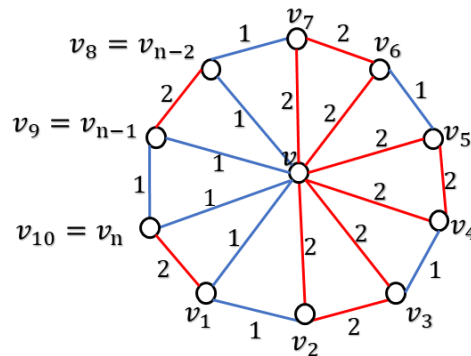
$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

Bukti.

Misalkan W_n terdiri dari lingkaran dengan panjang n , $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$ dan v adalah simpul lain yang bertetangga pada setiap simpul di C_n . Karena $W_3 = K_4$, hal ni berdasarkan Proposisi 1.a, diperoleh $rc(W_3) = 1$. Untuk $4 \leq n \leq 6$, graf roda W_n bukan merupakan graf lengkap, sehingga $rc(W_n) \geq 2$. Karena pewarnaan $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan dengan $c(v_i v) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i v) = 2$ jika dengan i genap, dan $c(v_i v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, dan $c(v_i v_{i+1}) = 2$ jika i genap adalah pewarnaan pelangi, maka $rc(W_n) = 2$ untuk $4 \leq n \leq 6$.

Terakhir, misalkan $n \geq 7$. Karena pewarnaan $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan dengan $c(v_i v) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i v) = 2$ jika i genap, dan $c(e) = 3$ untuk setiap $e \in E(C_n)$ adalah pewarnaan pelangi. Ini menunjukkan bahwa $rc(W_n) \leq 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(W_n) \geq 3$. Karena W_n bukan graf lengkap, $rc(W_n) \geq 2$. Asumsikan dengan kontradiksi, bahwa $rc(W_n) = 2$. Misalkan c' adalah pewarnaan pelangi dengan 2 warna dari W_n . Misalkan $c'(v_1 v) = 1$, untuk $4 \leq i \leq n - 2$. Pada graf W_n yang memiliki lintasan yang panjangnya 2 hanya lintasan $v_1 - v_i$ dengan melalui $v_1 - v - v_i$ dan $c'(v_i v) = 2$ untuk $4 \leq i \leq n - 2$. Karena $c'(v_4 v) = 2$, ini menunjukkan $c'(v_n v) = 1$.

Demikian pula $c'(v_3v) = 2$, saling bertetangga dengan $c'(v_{n-1}v) = 1$. Dengan cara yang sama, $c'(v_{n-1}v) = 1$ maka $c'(v_2v) = 2$ dan $c'(v_5v) = 2$ (ilustrasi pewarnaan ini dapat dilihat pada Gambar 2.12), sehingga tidak ada lintasan pelangi pada lintasan $v_2 - v_5$ di W_n , hal ini kontradiksi. Maka $rc(W_n) = 3$ untuk $n \geq 7$. ■



Gambar 1. Pewarnaan 2 warna pada graf W_{10}

Proposisi 4. Untuk $n \geq 3$, bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf roda W_n adalah(Chartrand dkk., 2008)

$$src(W_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Bukti.

Misalkan W_n terdiri dari $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$ dan v adalah simpul lain yang bertetangga dengan setiap simpul di C_n . Karena $W_3 = K_4$, berdasarkan Proposisi 1.a, bahwa $rc(W_3) = 1$. Berdasarkan Proposisi 3 untuk $4 \leq n \leq 6$, diperoleh $rc(W_n) = 2$ sehingga berdasarkan Proposisi 1.b jelas bahwa $src(W_n) = 2$. Maka, $src(W_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $4 \leq n \leq 6$.

Selanjutnya untuk $n \geq 7$. Terdapat k bilangan bulat sedemikian sehingga $3k - 2 \leq n \leq 3k$. Pertama akan dibuktikan bahwa $src(W_n) \geq k$. Dengan kontradiksi, misalkan bahwa $src(W_n) \leq k - 1$. Misalkan c merupakan pewarnaan pelangi kuat sebanyak $(k - 1)$ warna pada W_n . Karena $\deg(v) = n > 3(k - 1)$, maka terdapat $S \subseteq V(C_n)$ sedemikian sehingga $|S| = 4$ dan semua busur pada $\{uv: u \in S\}$ diwarnai dengan warna yang sama. Akibatnya terdapat paling sedikit dua simpul $u', u'' \in S$ dimana $d_{C_n}(u', u'') \geq 3$ dan $d_{W_n}(v'v'') = 2$. Karena u', v, u'' adalah satu-satunya lintasan $v' - v''$ yang geodesic di W_n , maka hal ini menyebabkan kontradiksi. Dengan demikian $src(W_n) \geq k$.

Untuk menunjukkan $src(W_n) \leq k$, didefinisikan pemetaan pewarnaan- k pelangi kuat dengan k warna $c: E(W_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dari W_n yaitu sebagai berikut

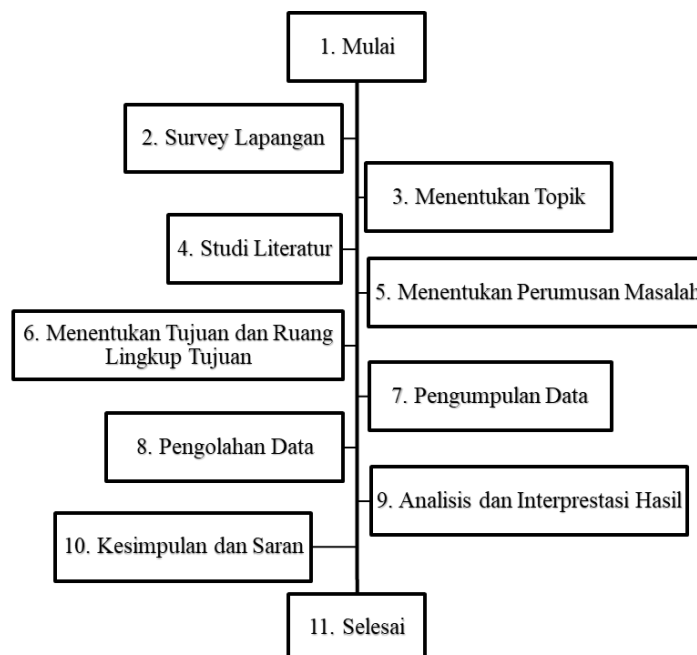
$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} \text{ dan } i \text{ genap} \\ j + 1, & \text{jika } e = v_i v_j; i \in \{3j + 1, 3j + 2, 3j + 3\} \\ & \text{untuk } 0 \leq j \leq k - 1 \end{cases}$$

Jadi, $src(W_n) = k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ untuk $n \geq 7$. ■

2. METODOLOGI

Penelitian ini adalah lanjutan dari penelitian sebelumnya. Yaitu bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf Neuron dan graf Kristal (Lubis dkk., 2019) serta dari beberapa penelitian sebelumnya (Keterhubungan dkk., 2019),(Kumala & Salman, 2015), (Muchlian, M. (2016). Rainbow Connection untuk Beberapa Graf Thron., t.t.) dan (Septyanto & Sugeng, 2017). Diawali dengan studi literatur mengenai bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat. Kemudian dilanjutkan dengan mengkaji beberapa graf yang akan diteliti pada pelabelan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat. Terakhir, penentuan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf yang akan diteliti. Diharapkan penelitian ini dapat berkontribusi dalam pengembangan jenis- jenis graf dan aplikasinya.

Berikut ini adalah rangkaian dari tahap penelitian yang disajikan dalam gambar diagram air penelitian.



Gambar 2. Diagram Air Penelitian

2.1. Tahapan Awal Penelitian

Tahapan awal penelitian yaitu melakukan indentifikasi suatu kegiatan permulaan dalam mengenali masalah suatu objek yang akan diteliti. Hal ini dilakukan dengan diskusi bersama teman sejawat sesama profesi di bidang keahliannya. Dengan menggabungkan ide penelitian, setelah itu, akan memungkinkan mendapatkan suatu permasalahan yang menarik untuk diteliti.

2.2. Survey Lapangan

Setelah menemukan ide yang akan diteliti, penulis melakukan studi lapangan. Yaitu dengan cara mencari tahu, suatu hal yang sedang trend pada ruang lingkup graf dan aplikasinya. Hal ini dilakukan agar penelitian yang akan dilaksanakan menghasilkan hasil yang relevan sesuai dengan perkembangan zaman, dan mengkonfirmasi ide penelitian yang akan diteliti. Selain itu, agar menghasilkan hasil penelitian yang berguna di berbagai bidang khususnya pada bidang graf dan aplikasinya.

2.3. Menentukan Topik

Setelah melakukan survey lapangan, penulis mulai menentukan topik yang akan diteliti yang berkorelasi dengan objek yang akan diteliti. Penentuan topik ini agar menghasilkan hasil penelitian yang lebih mengerucut dan tidak terlalu umum. Peneliti akan melakukan penelitian dengan topik pelabelan pada suatu graf. Telah diketahui, bahwa penelitian tentang graf tidaklah sedikit, bentuk dan jenis graf sangatlah beragam. Sehingga langkah pertama, peneliti harus menentukan objek penelitian yaitu akan menentukan graf yang akan ditentukan pelabelannya.

2.4. Studi Literatur

Setelah menentukan topik, dimana penulis harus menentukan objek yang akan diteliti, penulis akan melakukan studi literatur. Yaitu mengumpulkan referensi buku – buku atau jurnal – jurnal yang relevan dengan topik yang akan diteliti. Studi literatur sangat berguna sebagai landasan teori dalam suatu penelitian. Pengumpulan referensi dapat dilakukan dengan mengunjungi berbagai situs jurnal internasional ataupun nasional, mengunjungi perpustakaan daerah atau perpustakaan pusat, serta perpustakaan digital dengan mengakses *e-book* yang tersedia di berbagai *website*. Dengan melakukan studi literatur, penulis dapat menggunakan pemahaman yang diperoleh oleh para pemikir besar

yang telah pergi sebelumnya untuk menciptakan intelektual. Dengan begitu, penelitian dari peneliti sebelumnya dapat dikembangkan oleh peneliti – peneliti baru. Dengan usaha tersebut, peneliti dapat mengetahui, penelitian terbaru dan penelitian yang belum diteliti serta penelitian yang perlu dikembangkan sesuai dengan perkembangan zaman. Dari studi literatur, diharapkan pula peneliti mengetahui jenis graf yang belum digunakan penulis terdahulu, sehingga penelitian ini memiliki hasil keterbaruan yaitu menghasilkan jenis graf baru. Dari graf baru inilah yang akan dijadikan objek penelitian oleh peneliti.

2.5. Menentukan Perumusan Masalah

Setelah melakukan survey lapangan dan berkonsultasi bersama teman sejawat, selanjutnya peneliti mulai melakukan penentuan topik penelitian dengan mengacu pada studi literatur yang telah dilakukan penulis. Yaitu penulis diharapkan telah mendapatkan objek yang akan diteliti dalam pelabelan graf. Setelah itu, penulis dapat menentukan perumusan masalah dari topik yang akan diteliti. Perumusan masalah penelitian ini adalah permasalahan yang akan dibahas di dalam penelitian ini, yaitu bagaimana menentukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot C_n$, dan graf $K_m \odot W_n$. Dimana graf $K_m \odot C_n$, dan graf $K_m \odot W_n$ adalah graf yang akan menjadi objek penelitian ini. Penulis membatasi permasalahan penelitian yang akan diteliti, yaitu menentukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot C_n$, dan graf $K_m \odot W_n$.

2.6. Menentukan Tujuan dan Ruang Lingkup Tujuan

Ruang lingkup penelitian ini berfokus pada pelabelan graf, dimana peneliti akan mengerucutkan rumusan masalah dibidang pelabelan graf yaitu peneliti akan menentukan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot C_n$, dan graf $K_m \odot W_n$. Hal tersebut adalah tujuan yang ingin dicapai di dalam penelitian ini. Graf atau objek yang akan diteliti ditetapkan dengan mengoperasikan dari berbagai graf sehingga menghasilkan graf baru yang akan diteliti pelabelannya, secara khusus akan ditentukan bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf tersebut.

2.7. Pengumpulan Data

Pengumpulan data merupakan tahapan penting sebelum mengolah data. Yaitu dengan mengumpulkan data – data yang berkaitan dengan objek yang akan diteliti. Dari

berbagai macam pelabelan pada graf, peneliti pada akhirnya memilih topik yang pelabelan yang berupa pelabelan graf atau pewarnaan graf. Pewarnaan graf ini diambil dari ide (Gallian, 2018) Gallian, bahwa pelabelan busur pada suatu graf G adalah sembarang pemetaan $f: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Namun Chartrand, dkk. menggunakan istilah pewarnaan busur untuk menyebut pelabelan busur, ketika memperkenalkan pewarnaan pelangi. Pewarnaan pelangi adalah suatu jenis pelabelan busur yang terkait erat dengan struktur lintasan pada suatu graf. Meskipun masih relatif baru, sudah banyak penelitian tentang topik ini, sebagaimana disurvei oleh Li dan Sun (Li dkk., 2013). Pada Subbab ini diambil dari (Chartrand dkk., 2008), kecuali jika disebutkan berbeda. Dalam penelitian ini penulis membutuhkan data – data hasil dari studi literatur, yaitu memahami dasar dari teori graf, penulis akan menyajikan sejarah singkat graf, pengertian graf, mengumpulkan berbagai macam jenis graf, dan mengetahui operasi – operasi pada graf.

2.8. Pengolahan Data

Dari hasil pengumpulan data yang dibutuhkan pada penelitian ini, penulis menentukan jenis graf dan operasi pada graf, kemudian penulis akan mengoperasikan graf – graf yang telah ditentukan penulis sehingga menghasilkan suatu graf baru. Graf baru yang dihasilkan tersebut akan dijadikan objek pelabelan graf atau pewarnaan graf. Dimana peneliti akan meneliti jenis pelabelan graf berupa pewarnaan bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat.

2.9. Analisis dan Interpretasi Data

Setelah peneliti menentukan objek, dengan menghasilkan graf baru, yaitu hasil dari suatu operasi berbagai graf, kemudian peneliti melakukan analisis dan interpretasi data. Peneliti akan menganalisis objek yang telah ditentukan, kemudian akan membuat suatu teorema. Selanjutnya peneliti akan menginterpretasikan hasil penelitiannya dengan membuktikan teorema yang telah dihasilkan. Penulis telah mencapai tahapan ini, akan dilakukan analisis lebih lanjut agar penelitian ini mencapai tujuan yang dituju.

3. PEMBAHASAN

3.1. Bilangan Keterhubungan Pelangi dan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf

$$K_m \odot C_n.$$

Terlebih dahulu diberikan definisi graf $K_m \odot C_n$.

Definisi 1. Misalkan K_m adalah graf lengkap dengan m simpul dan C_n graf lingkaran dengan n simpul. Graf $K_m \odot C_n$ merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf K_m dan m salinan dari C_n , kemudian pada simpul ke- i dari K_m dikaitkan ke setiap salinan simpul ke- i dari C_n .

Misalkan m dan n merupakan bilangan bulat positif dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, himpunan simpul dan busur dapat didefinisikan sebagai berikut;

$$V(K_m \odot C_n) = \{v_i | i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \{v_{i,j} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

$$E(K_m \odot C_n) = \{v_{i_1} v_{i_2} | i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \\ \{v_i v_{i,j} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \\ \{v_{i,j} v_{i,j+1} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n, n + 1 = 1\}\}.$$

Teorema 1. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot C_n$ adalah

1. Jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq m + 1$, maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = m + 1$.
2. Jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > m + 1$, maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1, diketahui bahwa pusat dari graf $K_m \odot C_n$ adalah graf lengkap. Berdasarkan Proposisi 1.a, bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf lengkap adalah 1. Hal ini berarti setiap busur pada graf lengkap dapat diwarnai dengan satu warna.

Misalkan $C_n: v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}, v_{i,(n+1)} = v_{i,1}$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq n$. Maka pewarnaan busur pada graf $K_m \odot C_n$ adalah sebagai berikut

- $c(v_{i_1} v_{i_2}) = 1; i_1 \neq i_2; i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$
- $c(v_i v_{i,j}) = i + 1; i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $c(v_{i,j} v_{i,j+1}) = \begin{cases} j; & \text{jika } 1 \leq j \leq k \\ j - k; & \text{jika } k + 1 \leq j \leq n \end{cases}; \text{ jika } n \text{ genap dan } n = 2k$
- $c(v_{i,j} v_{i,j+1}) = \begin{cases} j; & \text{jika } 1 \leq j \leq k + 1 \\ j - k - 1; & \text{jika } k + 2 \leq j \leq n \end{cases}; \text{ jika } n \text{ ganjil dan } n = 2k + 1$

Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan pelangi dan pelangi kuat dengan membagi kedalam dua kasus.

Kasus 1. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq m + 1$.

Agar lintasan pada graf $K_m \odot C_n$ membentuk keterhubungan pelangi, maka pada $rc(K_m \odot C_n) \geq m + 1$. Andaikan $rc(K_m \odot C_n) < m + 1$. Misalkan pada graf $K_m \odot C_n$ memiliki m warna, maka pada lintasan $v_{i_1,j}v_{i_2,j}$ akan ada warna yang sama. Sehingga lintasan tersebut tidak dapat dikatakan lintasan pelangi. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Maka haruslah $rc(K_m \odot C_n) \geq m + 1$.

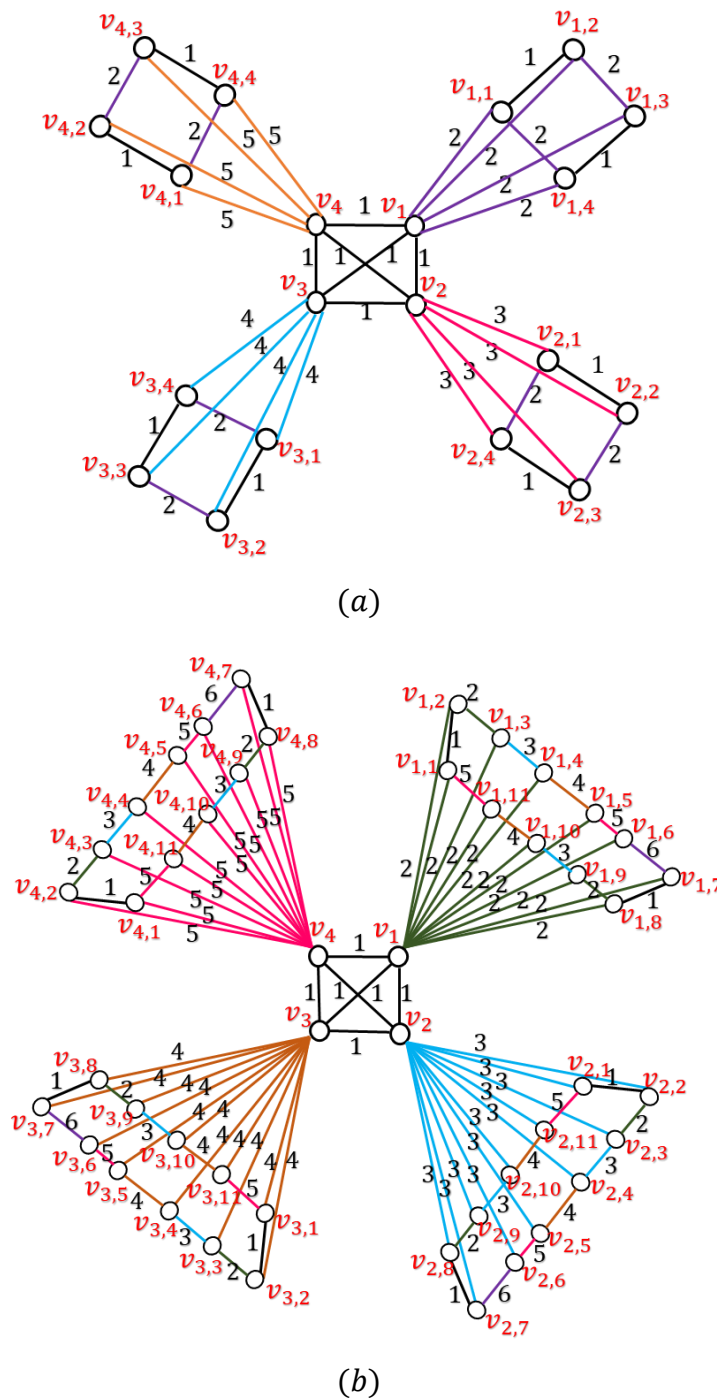
Selanjutnya, karena semua lintasan $v_{i_1,j}v_{i_2,j}$ untuk setiap pasang simpul pada graf $K_m \odot C_n$ adalah lintasan yang *geodesic* dan semua lintasan $v_{i,j}v_{i,j+1}$ juga merupakan lintasan yang *geodesic* (berdasarkan Proposisi 2), maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n)$. Pada kasus ini, berarti pewarnaan yang digunakan tidak boleh kurang dari $m + 1$. Maka, didapat $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = m + 1$. Ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $K_4 \odot C_3$ dan $K_4 \odot C_4$ dapat dilihat pada Gambar 3 (a).

Kasus 2. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > m + 1$.

Untuk $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > m + 1$, agar lintasan pada graf $K_m \odot C_n$ membentuk keterhubungan pelangi, maka $rc(K_m \odot C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Andaikan $rc(K_m \odot C_n) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Misalkan pada graf $K_m \odot C_n$ memiliki $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ warna, maka pada lintasan $v_{i,j}v_{i,j+1}$ yang merupakan graf lingkaran, akan ada warna yang sama (berdasarkan Proposisi 2). Sebagai contoh, dapat dilihat pada Gambar 3. Sehingga lintasan tersebut tidak dapat dikatakan lintasan pelangi karena ada warna yang sama pada lintasan tersebut, Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Maka haruslah $rc(K_m \odot C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Selanjutnya, karena semua lintasan $v_{i_1,j}v_{i_2,j}$ untuk setiap pasang simpul pada graf $K_m \odot C_n$ adalah lintasan yang *geodesic* dan semua lintasan $v_{i,j}v_{i,j+1}$ juga merupakan lintasan yang *geodesic* (berdasarkan Proposisi 2), maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n)$. Pada kasus ini, berarti pewarnaan yang digunakan tidak boleh kurang dari $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Maka, didapat $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. ■

Ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $K_4 \odot C_{11}$, dapat dilihat pada Gambar 3. (b).



Gambar 3. (a) $K_4 \odot C_4$ (b) $K_4 \odot C_{11}$

Pewarnaan $K_4 \odot C_4$ pada Gambar 3 (a) dan $K_4 \odot C_{11}$ Gambar 3 (b), banyaknya pewarnaan pelangi dan pelangi kuat yang dibutuhkan bergantung pada banyaknya pewarnaan pelangi dan pelangi kuat pada C_n .

3.2. Bilangan Keterhubungan Pelangi dan Keterhubungan Pelangi Kuat Graf $K_m \odot$

W_n

Terlebih dahulu diberikan definisi graf $K_m \odot C_n$.

Definisi 2. Misalkan K_m adalah graf lengkap dengan m simpul dan W_n graf lingkaran dengan n simpul. Graf $K_m \odot W_n$ merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf K_m dan m salinan dari W_n , kemudian simpul ke- i dari K_m dikaitkan ke setiap salinan simpul ke- i pada W_n .

Misalkan m dan n merupakan bilangan bulat positif dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, himpunan simpul dan busur dapat didefinisikan sebagai berikut;

$$V(K_m \odot W_n) = \{v_i | i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \{v_{i,j} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{v_{i,0} | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

$$E(K_m \odot W_n) = \{v_{i_1} v_{i_2} | i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \{v_i v_{i,j} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n, n+1=1\}\} \cup \{v_{i,j} v_{i,0} | i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n, n+1=1\}\}.$$

Teorema 2. untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka bilangan keterhubungan pelangi pada graf $K_m \odot W_n$ adalah:

$$rc(K_m \odot W_n) = m + 1.$$

Bukti

Berdasarkan Definisi 2, diketahui bahwa pusat dari graf $K_m \odot W_n$ adalah graf lengkap, dan sesuai Proposisi 1.a, bilangan keterhubungan pelangi pada graf lengkap adalah 1. Hal ini menunjukkan bahwa pada pewarnaan pusat graf $K_m \odot W_n$ setiap busurnya dapat diwarnai dengan satu warna.

Simpul yang dikaitkan pada graf lengkap adalah graf roda. Agar pewarnaan pada graf $K_m \odot W_n$ membentuk pewarnaan pelangi, perhatikan lintasan $v_{i_1} - v_{i_2}$, $v_{i_1,j} - v_{i_2,j}$, dan lintasan-lintasan pada graf roda. Untuk pewarnaan pelangi pada W_n , berdasarkan Proposisi 3, yaitu:

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

Maka pewarnaan pelangi yang dibutuhkan pada W_n paling banyak adalah 3 warna. Sedangkan pada busur graf lengkap, hanya membutuhkan 1 warna (sesuai Proposisi 1.a),

dan pada busur penghubung antara graf lengkap dan graf roda membutuhkan m warna, untuk $m \geq 2$. Maka, pewarnaan pelangi pada graf $K_m \odot W_n$ adalah sebanyak $m + 1$ warna.

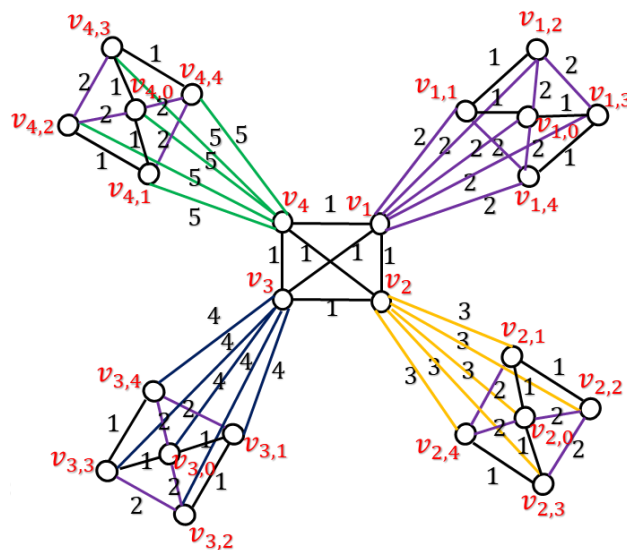
Pertama akan dibuktikan $rc(K_m \odot W_n) \leq m + 1$. Untuk membuktikan $rc(K_m \odot W_n) \leq m + 1$, berikut pewarnaan pada busur K_m dan busur-busur penghubung antara graf lengkap dengan graf roda

- $c(v_{i_1} v_{i_2}) = 1; i_1 \neq i_2; i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$
- $c(v_i v_{i,j}) = c(v_i v_{i,0}) = i + 1; i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Untuk pewarnaan pada W_n , cara mewarnai setiap busurnya dapat dilihat pada Proposisi 3. Sehingga didapat $rc(K_m \odot W_n) \leq m + 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(K_m \odot W_n) \geq m + 1$. Pembuktian menggunakan kontradiksi. Andaikan $rc(K_m \odot W_n) < m + 1$. Misalkan c adalah pewarnaan pelangi dengan m warna dari graf $K_m \odot W_n$. Misalkan pada lintasan $v_{i_1,j} - v_{i_2,j}$ untuk $i_1 \neq i_2; i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$, akan ada warna yang berulang pada busur berwarna di lintasan tersebut. Maka lintasan tersebut bukan lintasan pelangi. Hal ini kontradiksi dari pengandaian bahwa $rc(K_m \odot W_n) < m + 1$. Harusnya $rc(K_m \odot W_n) \geq m + 1$. Maka $rc(K_m \odot W_n) = m + 1$.

Ilustrasi pewarnaan pelangi pada $K_4 \odot W_4$ dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. $K_4 \odot W_4$

Teorema 3 Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$, maka bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot W_n$ adalah

1. Jika $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq m + 1$, maka $src(K_m \odot W_n) = m + 1$.
2. Jika $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor > m + 1$, maka $src(K_m \odot W_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2, diketahui bahwa pusat dari graf $K_m \odot W_n$ adalah graf lengkap.

Berdasarkan Proposisi 1.a, bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf lengkap adalah

1. Hal ini berarti setiap busur pada graf lengkap dapat diwarnai dengan satu warna.

Selanjutnya, graf yang setiap simpulnya dikaitkan pada simpul graf lengkap adalah graf

roda. Berdasarkan Proposisi 4, W_n terdiri dari lingkaran, $C_n: v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}, v_{i,n+1} =$

$v_{i,1}$ dan simpul $v_{i,0}$ yang lain terhubung pada setiap simpul di C_n , maka pewarnaan pada

graf $K_m \odot W_n$ agar membentuk *geodesic* pelangi, adalah sebagai berikut:

- $c(v_{i_1}v_{i_2}) = 1; i_1 \neq i_2; i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$
- $c(v_i v_{i,j}) = i + 1; i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $c(v_{i,j}v_{i,j+1}) = \begin{cases} 1; & \text{jika } j \text{ ganjil} \\ 2; & \text{jika } j \text{ genap} \end{cases} i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $c(v_{i,j}v_{i,0}) = r + 1, i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{3r + 1, 3r + 2, 3r + 3\}$

Untuk $0 \leq r \leq k - 1$ dan $k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan pelangi dan pelangi kuat dengan.

Untuk pewarnaan pada W_n agar membentuk *geodesic* pelangi, akan dibagi kedalam dua kasus

Kasus 1. $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq m + 1$.

Berdasarkan Teorema 2, diperoleh $rc(K_m \odot W_n) = m + 1$, dan semua lintasan antara

$v_{i_1,j}v_{i_2,j}$ dan $v_{i_1,0}v_{i_2,0}$ pada graf $K_m \odot W_n$ adalah lintasan yang *geodesic* dan semua

lintasan $v_{i,j}v_{i,j+1}$ dan $v_{i,j}v_{i,0}$ juga merupakan lintasan yang *geodesic* (berdasarkan

Proposisi 4), maka $src(K_m \odot W_n) = m + 1$.

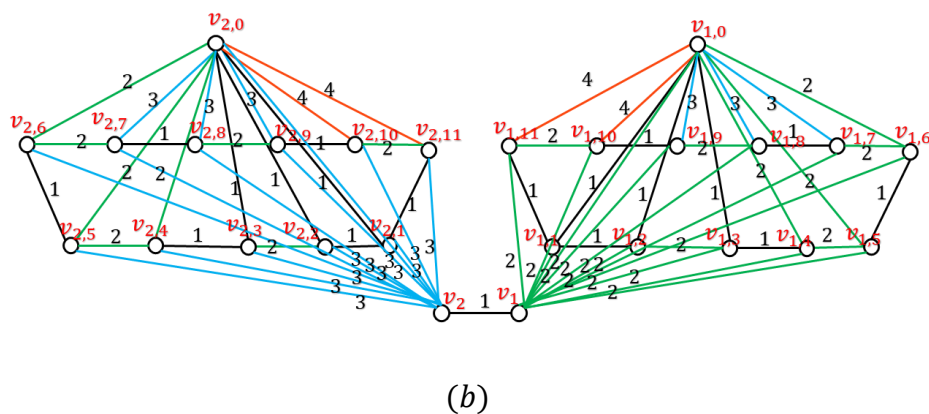
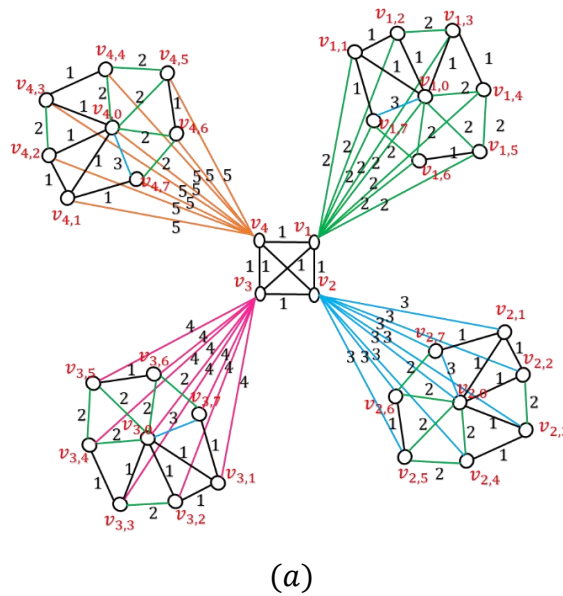
Ilustrasi pewarnaan pelangi kuat untuk $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq m + 1$ pada graf $K_4 \odot W_7$ dapat dilihat

pada Gambar 5 (a)

Kasus 2. $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor > m + 1$.

Pada kasus ini, pewarnaan pelangi kuat pada graf $K_m \odot W_n$ bergantung pada pewarnaan graf W_n . Karena, berdasarkan Proposisi 4, pewarnaan pelangi kuat pada graf W_n adalah $\lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $n \geq 7$. Andaikan $src(K_m \odot W_n) < \lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $\lceil \frac{n}{3} \rceil > m + 1$. Maka, berdasarkan pada pembuktian Proposisi 4 ada lintasan di W_n tidak membentuk *geodesic* pelangi. Hal ini kontradiksi dari pengandaian bahwa $src(K_m \odot W_n) < \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Haruslah $src(K_m \odot W_n) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $\lceil \frac{n}{3} \rceil > m + 1$. Maka terbukti $src(K_m \odot W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $\lceil \frac{n}{3} \rceil > m + 1$. ■

Ilustrasi pewarnaan pelangi kuat untuk $\lceil \frac{n}{3} \rceil > m + 1$ pada graf $K_m \odot W_n$ dapat dilihat pada Gambar 5 (b)



Gambar 5. (a) $K_4 \odot W_7$ (b) $K_2 \odot W_{11}$

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil uraian yang telah dijelaskan pada bab-bab sebelumnya, maka penulis dapat menarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka bilangan keterhubungan pelangi dan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot C_n$ adalah
 - a. Jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq m + 1$, maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = m + 1$
 - b. Jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > m + 1$, maka $rc(K_m \odot C_n) = src(K_m \odot C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
2. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$, maka bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf $K_m \odot W_n$ adalah
 - a. Jika $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq m + 1$, maka $src(K_m \odot W_n) = m + 1$.
 - b. Jika $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor > m + 1$, maka $src(K_m \odot W_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

5. DAFTAR PUSTAKA

- AFOSR 70-1153 TR CO o GRAPH THEORY 1 HARARY. (t.t.).
- Chartrand, G., Johns, G. L., Mckee, K. A., & Zhang, P. (2008). *Mathematica Bohemica* (Vol. 133, Nomor 1).
- Dickson, A. (2006). *Introduction to Graph Theory*.
- Gallian, J. A. (2018). A Dynamic Survey of Graph Labeling. Dalam the electronic journal of combinatorics.
- Keterhubungan, B., Dan, P., Pelangi, K., Pada, K., Kelas, B., Korona, G., & Maulani, A. (2019). *STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)*. Jurnal Statistika dan Matematika), 1(1).
- Kumala, I. S., & Salman, A. N. M. (2015). The Rainbow Connection Number of a Flower (C_m, K_n) Graph and a Flower (C_3, F_n) Graph. *Procedia Computer Science*, 74, 168–172. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.094>
- Li, X., Shi, Y., & Sun, Y. (2013). Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics*, 29(1), 1–38. <https://doi.org/10.1007/s00373-012-1243-2>
- Lubis, H., Surbakti, N. M., Kasih, R. I., Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (2019). Rainbow connection and strong rainbow connection of the crystal graph and neurons graph. *AIP Conference Proceedings*, 2168. <https://doi.org/10.1063/1.5132480>

- Muchlian, M. (2016). Rainbow Connection untuk Beberapa Graf Thron. (t.t.).
- Septyanto, F., & Sugeng, K. A. (2017). Rainbow connections of graph joins. Dalam AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS (Vol. 69, Nomor 3).
- Sugeng, K.A., Slamet, S., & Silaban, D.R. (2014). Teori Graf dan Aplikasinya (edisi kedua). Depok: Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.