JURNAL SAINTIKA UNPAM : Jurnal Sains dan Matematika Unpam Vol. 3, No. 2 (2021)
p-ISSN 2621-7856 e-ISSN 2655-7312 10th article, page 99 - 102

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UKURAN UNTUK GRAF POHON DAN GRAF LINTASAN

TREE-PATH SIZE MULTIPARTITE RAMSEY NUMBERS

Yerti Syahraini Putri*, Effendi, dan Syafrizal Sy
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas, Kampus Unand Limau Manis, Padang - Indonesia, 25163
*yertisyahraini06@gmail.com

ABSTRACT

Let j, l, n, s and t be natural number with $n, s \geq 2$ and $j, l, t \geq 1$ then the size multipartite Ramsey number $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ is defined as the smallest natural number ξ such that an arbitrary coloring of the edges of $K_{j\times\xi}$ using the two colors red and blue, necessarily forces a red $K_{n\times l}$ or a blue $K_{s\times t}$ as subgraph. Let G and H be any graphs, for integer $j \geq 2$ the size multipartite Ramsey number $m_j(G, H) = \xi$ is the smallest integer such that every factorization of graph $K_{j\times\xi} \coloneqq F_1 \oplus F_2$ satisfies the following candition: either F_1 contains G as a subgraph or F_2 contains H as a subgraph. In this paper we obtain the exact values of the size multipartite Ramsey number $m_j(T_n, P_3)$ for $j \geq 3$. The results show that the size multipartite Ramsey number for tree and path, for integer n and $j \geq 3$, is $m_3(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, $m_4(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, and $m_3(T_j, P_3) = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

Keywords : Ramsey, multipartite, size, tree, path

ABSTRAK

Misalkan j, l, n, s dan t adalah bilangan-bilangan asli dengan $n, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$ maka bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari semua sisi $K_{j\times\xi}$ menggunakan dua warna merah dan biru, akan selalu berlaku bahwa $K_{j\times\xi}$ memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf. Untuk sebarang graf G dan H, $j \geq 2$ adalah bilangan bulat, bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga setiap faktorisasi dari graf $K_{j\times\xi} \coloneqq F_1 \oplus F_2$ memenuhi kondisi berikut: F_1 memuat subgraf G atau F_2 memuat subgraf H. Dalam makalah ini, akan ditentukan nilai-nilai dari bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(T_n, P_3)$ untuk $j \geq 3$. Hasil pada penelitian ini menunjukkan bahwa bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf pohon dan graf lintasan, untuk sebarang bilangan bulat positif n dan $j \geq 3$, yaitu $m_3(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, $m_4(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, dan $m_3(T_j, P_3) = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

Kata kunci : Ramsey, multipartit, ukuran, pohon, lintasan.

1. PENDAHULUAN

Penentuan bilangan Ramsey merupakan salah satu topik kajian matematika dalam bidang kombinatorika. Perkembangan bilangan Ramsey diawali dari bilangan Ramsey klasik yaitu untuk setiap bilangan bulat positif m dan n bilangan Ramsey $r(m, n)$ adalah bilangan bulat positif terkecil r sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi pada graf lengkap K_r akan selalu menghasilkan graf lengkap K_m merah atau K_n biru sebagai subgraf.

Penentuan bilangan Ramsey klasik $r(m,n) = r(K_m, K_n)$ dengan K_m dan K_n adalah graf lengkap dengan m dan n titik adalah suatu masalah yang sulit hingga kini. Karena sampai saat ini hanya sembilan bilangan Ramsey klasik yang baru diketahui. Karena sulitnya mendapatkan bilangan Ramsey klasik untuk nilai m dan n yang lain, maka kajian bilangan Ramsey diperluas untuk sebarang graf yang tak harus lengkap. Bilangan Ramsey untuk sebarang graf ini dinamakan bilangan Ramsey graf.

Salah satu bentuk perluasan konsep dari bilangan Ramsey graf adalah bilangan Ramsey multipartit ukuran. Burger dan Vuuren (2004) memberikan konsep tentang bilangan Ramsey multipartit ukuran sebagai berikut. Misalkan j, l, n, s dan t adalah bilangan-bilangan asli dengan $n, s \geq 2$ dan $j, l, t \geq 1$ maka bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ adalah bilangan asli terkecil ξ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari sisi $K_{j\times\xi}$ menggunakan dua warna merah dan biru, akan selalu berlaku bahwa $K_{j\times\xi}$ memuat $K_{n\times l}$ merah atau $K_{s\times t}$ biru sebagai subgraf.

Sampai saat ini, beberapa nilai bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi beberapa graf telah diperoleh, diantaranya bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_s, G)$ untuk $j \geq 3$ dan $2 \leq s \leq 3$ dengan $G = W_n, S_n$ atau F_n untuk $n \geq 6$ dikaji oleh Syafrizal Sy, dkk (2007), $m_j(P_s, C_n)$ untuk $j \geq 3$, $n \geq 2$ dan $s \geq 3$ atau 4 dikaji oleh Syafrizal Sy (2010). Selanjutnya bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk lintasan yaitu $m_j(P_s, P_t)$ untuk $s = 2,3$ dan $t \geq 2$ dikaji oleh Syafrizal Sy, dkk (2005), serta bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(P_3, B_n)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 1$, C. Jayawardene dan Jayampathy R mengkajinya pada tahun 2016, dan bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j\left(P_3, K_{2,n}\right)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 1$ pada tahun 2019 dikaji oleh C. J. Jayawardene.

Diberikan dua graf G_1 dan G_2, dan bilangan bulat $j \geq 2$, bilangan Ramsey $m_j(G_1, G_2)$ adalah bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga setiap faktorisasi dari graf $K_{j\times t} = F_1 \oplus F_2$ akan memenuhi kondisi berikut: F_1 memuat G_1sebagai subgraf atau F_2 memuat G_2 sebagai subgraf (syafrizal Sy, 2020). Bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(G, H)$ untuk $G = T_n$ dan $H = P_n$ yaitu bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf pohon dan graf lintasan masih menarik untuk dikaji. Graf pohon yaitu graf terhubung dan tidak memiliki siklus. Graf pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Sedangkan graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf terhubung yang membentuk lintasan yang terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geq 2$.

2. METODOLOGI

Untuk menunjukan bilangan Ramsey multipartit ukuran $m_j(T_n, P_3) = t$ dapat dilakukan dalam dua tahap sebagai berikut:

1) Batas bawah, yaitu menunujukkan bahwa $m_j(T_n, P_3) \geq t$, dengan cara menunjukkan bahwa terdapat pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf $K_{j\times t-1}$ yang tidak memuat graf T_n merah dan juga tidak memuat graf P_3 biru.
2) Batas atas, yaitu dengan menunjukkan bahwa $m_j(T_n, P_3) \leq t$, dengan cara menunjukkan untuk sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $K_{j\times t}$ memuat graf T_n merah atau graf P_3 biru.

3. PEMBAHASAN

Berikut ini disajikan beberapa teorema dari bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf pohon dan graf lintasan.

Teorema 1. *Untuk bilangan bulat* n, *berlaku* $m_3(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $m_3(T_n, P_3) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, dengan cara menunjukkan terdapat pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf $K_{3\times(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil-1)}$ yang tidak memuat T_n merah dan juga tidak memuat P_3 biru. Perhatikan graf $G = K_{3\times(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil-1)}$, jika semua sisi dari G diberi warna merah maka G tidak memuat P_3 biru, karena $\frac{n}{3} \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil < \frac{n}{3} + 1$ maka $3 \times (\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1) < 3 \times (\frac{n}{3} + 1 - 1)$ karena $3 \times \frac{n}{3} = n$ maka $3 \times (\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1) < n$, sehingga $\left| V(K_{3\times(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil-1)}) \right| < n$, maka jelas bahwa G juga tidak memuat T_n merah.

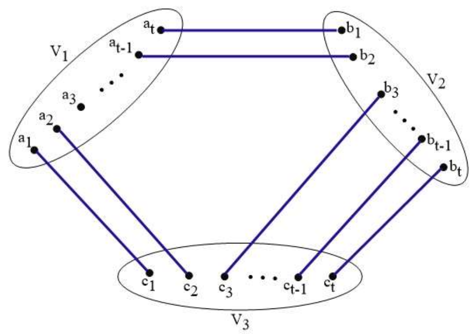
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_3(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Misalkan $t = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, perhatikan graf $F = K_{3\times t}$, misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sebarang faktorisasi dari F, sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_3 maka akan ditunjukkan F_2 memuat T_n. Tanpa mengurangi perumuman, karena F_1 tidak memuat P_3 maka maksimum

p-ISSN 2621-7856 e-ISSN 2655-7312 10th article, page 102 - 102

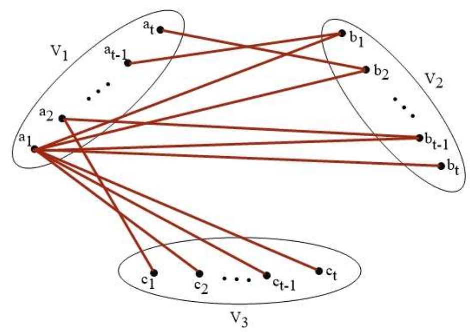
F_1 suatu *matching*. Misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$, $V_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\}$ dan $V_3 = \{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari F.

Kasus 1. t genap.

Karena t genap, maka $3t$ genap, akibatnya F_1 memuat *matching* sempurna (lihat Gambar 2.1). Selanjutnya untuk menunjukkan F_2 memuat T_n (lihat Gambar 2.2), oleh karena itu, $m_3(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.



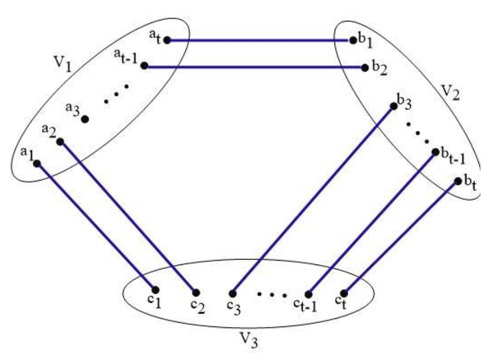
Gambar 2.1. F_1 tidak memuat P_3



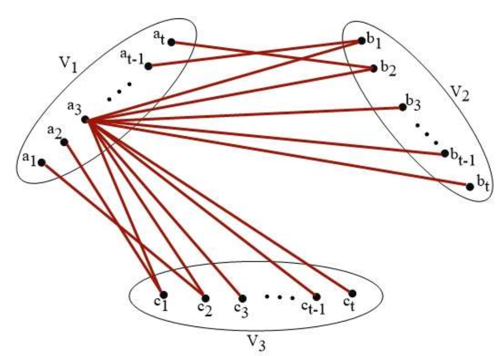
Gambar 2.2. F_2 memuat T_n

Kasus 2. t ganjil.

Karena t ganjil, maka $3t$ ganjil, akibatnya F_1 memuat *matching* tidak sempurna (lihat Gambar 2.3). Selanjutnya untuk menunjukkan F_2 memuat T_n (lihat Gambar 2.4), oleh karena itu, $m_3(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.



Gambar 2.3. F_1 tidak memuat P_3

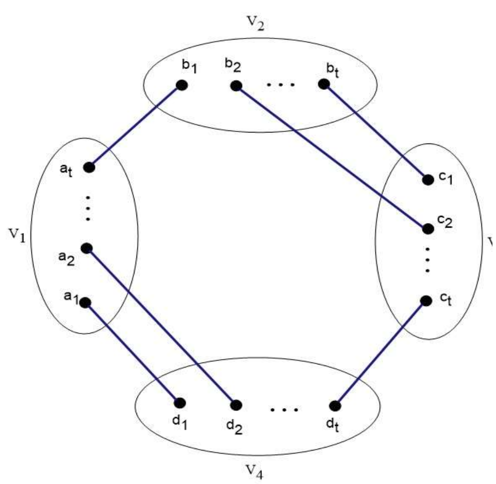


Gambar 2.4. F_2 memuat T_n

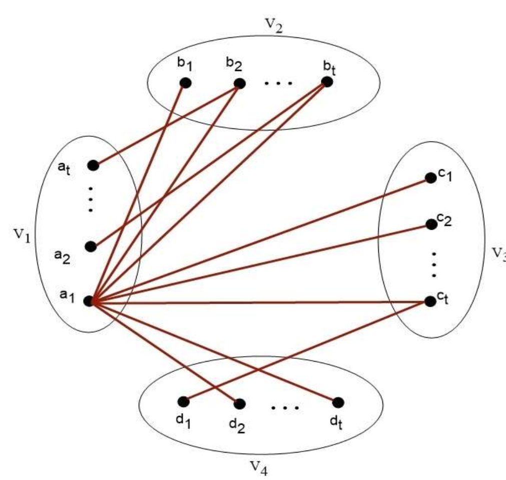
Teorema 2. *Untuk bilangan bulat* n, *berlaku* $m_4(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $m_4(T_n, P_3) \geq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, dengan cara menunjukkan terdapat pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf $K_{4\times\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1\right)}$ yang tidak memuat T_n merah dan juga tidak memuat P_3 biru. Perhatikan graf $G = K_{4\times\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1\right)}$, jika semua sisi dari G diberi warna merah maka G tidak memuat P_3 biru, karena $\frac{n}{4} \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil < \frac{n}{4} + 1$ maka $4 \times \left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1\right) < 4 \times (\frac{n}{4} + 1 - 1)$ karena $4 \times \frac{n}{4} = n$ maka $4 \times (\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1) < n$, sehingga $\left| V(K_{4\times(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1)}) \right| < n$, maka jelas bahwa G juga tidak memuat T_n merah.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_4(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Misalkan $t = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, perhatikan graf $F = K_{4\times t}$, misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sebarang faktorisasi dari F, sedemikian sehingga F_1 tidak memuat P_3 maka akan ditunjukkan F_2 memuat T_n. Tanpa mengurangi perumuman, karena F_1 tidak memuat P_3 maka maksimum F_1 suatu *matching*. Misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$, $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$, $V_3 = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ dan $V_4 = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari F. Karena j genap akibatnya F_1 memuat *matching* sempurna (lihat Gambar 2.5). Selanjutnya untuk menunjukkan F_2 memuat T_n (lihat Gambar 2.6), oleh karena itu, $m_4(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.



Gambar 2.5. F_1 tidak memuat P_3



Gambar 2.6. F_2 memuat T_n

Berikut diberikan teorema tentang bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf pohon dan P_3 dalam bentuk umum, yaitu untuk sebarang bilangan bulat positif n dan $j \geq 3$.

Teorema 3. *Untuk sebarang bilangan bulat positif* n *dan* $j \geq 3$, *berlaku* $m_j(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $m_j(T_n, P_3) \geq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$, dengan cara menunjukkan terdapat pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf $K_{j\times\left(\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil-1\right)}$ yang tidak memuat T_n merah dan juga tidak memuat P_3 biru. Perhatikan graf $G = K_{j\times\left(\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil-1\right)}$, jika semua sisi dari G diberi warna merah maka G tidak memuat P_3 biru, karena $\frac{n}{j} \leq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil < \frac{n}{j} + 1$ maka $3 \times \left(\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil - 1\right) < j \times (\frac{n}{j} + 1 - 1)$ karena $j \times \frac{n}{j} = n$ maka $j \times (\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil - 1) < n$, sehingga $\left|V(K_{j\times(\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil-1)})\right| < n$, maka jelas bahwa G juga tidak memuat T_n merah.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $m_j(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$. Misalkan $t = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$, perhatikan graf $F \cong K_{j\times\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil}$, dan semua sisi dari F diberi warna merah-biru secara sebarang sedemikian sehingga F tidak memuat P_3 biru, maka akan ditunjukkan F memuat T_n merah.

Sekarang, misalkan $V_1, V_2, \ldots, V_j$ adalah himpunan-himpunan partit dari F. Selanjutnya karena F tidak memuat P_3 biru, maka maksimum F memuat suatu *matching*, dan setiap sisi pada *matching* tersebut diberi warna biru, maka jelas bahwa F tidak memuat P_3 biru. Untuk menunjukkan bahwa F memuat T_n merah. Misalkan $F_1 \oplus F_2$ adalah sebarang faktorisasi dari F. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. j ganjil.

Dari Teorema 1, dapat dilihat bahwa:

Subkasus 1.1. Jika t ganjil.

Karena t ganjil, maka jt ganjil, sehingga F memuat *matching* tidak sempurna dalam F_1, dengan menghubungkan titik-titik di $V_1, V_2, \ldots, V_j$ maka diperoleh sisi-sisi yang membentuk T_n dalam F_2 dengan $n = (j-1)t + 1 + t - 1 = jt$, karena $jt = j\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil =$

n maka jelas bahwa F_2 memuat T_n sebanyak n titik. Oleh karena itu, $m_j(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

Subkasus 1.2. Jika t genap.

Karena t genap, maka jt genap, sehingga F memuat *matching* sempurna dalam F_1, dengan menghubungkan titik-titik $V_1, V_2, \dots, V_j$ maka diperoleh sisi-sisi yang membentuk T_n dalam F_2 dengan $n = (j-1)t + t - 1 + 1 = jt$, karena $jt = j\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil = n$, maka jelas bahwa F_2 memuat T_n sebanyak n titik. Oleh karena itu, $m_j(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

Kasus 2. j genap.

Dari Teorema 2 pada F_2 dipunyai T_n sebanyak n titik, yaitu dengan menghubungkan titik-titik di $V_1, V_2, \dots, V_j$ maka diperoleh sisi-sisi yang membentuk T_n dengan $n = (j-1)t + t - 1 + 1 = jt$karena $jt = j\left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil = n$, maka jelas bahwa F_2 memuat T_n. Oleh karena itu, $m_j(T_n, P_3) \leq \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

4. SIMPULAN

Pada makalah ini, dilakukan kajian yang berkaitan dengan masalah penentuan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf pohon dan graf lintasan P_3 untuk sebarang bilangan bulat positif n dan $j \geq 3$, yaitu $m_j(T_n, P_3)$. Berikut ini adalah hasil-hasil yang telah diperoleh.

1) Untuk bilangan bulat positif n, berlaku $m_3(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
2) Untuk bilangan bulat positif n, berlaku $m_4(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.
3) Untuk sebarang bilangan bulat positif n dan $j \geq 3$, berlaku $m_j(T_n, P_3) = \left\lceil \frac{n}{j} \right\rceil$.

5. DAFTAR PUSTAKA

Alewyn P. Burger., & J. H Van Vuuren. 2004. Ramsey Number In Complete Balance Multipartite Graphs, Part II : Size Numbers, Discrete Math, 283, 45-49.

Chula Jayawardene., & Jayampathy R. 2016. Size Multipartite Ramsey Numbers For Small Paths Versus Books, Indonesia Journal of Combinatorics, 31-40.

C. J. Jayawardene. 2019. Size Multipartite Ramsey Numbers For Small Paths vs $K_{2,n}$. Annals of Pure and Applied Mathematics, 19(1), 7-17.

Syafrizal Sy., Baskoro E.T., & Uttunggadewa S. 2005. The Size Multipartite Ramsey Numbers For Paths. J. Combin. Math, Comput, 55, 103-107.

Syafrizal Sy., Baskoro E.T., & Uttunggadewa S. 2007. The Size Multipartite Ramsey Numbers For Small Paths Versus Other Graphs. Far East J. Appl. Math, 28(1), 131-138.

Syafrizal Sy & Effendi. 2020. The Size Multipartite Ramsey Numbers $m_j\left(P_n, K_{j\times b}\right)$. Ins. J. Appl. Math, 33(2), 305-311

Syafrizal Sy. 2010. On Size Multipartite Ramsey Numbers For Paths Versus Cycles Of Three Or Four Vertices. Far East J. Appl. Math, 28(pp), 109-116.