P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH *DENGUE* (DBD) TIPE *SIR* MEMAKAI LARVASIDA

Elinora Naikteas Bano[1], Adriana Leltakaeb[2], Leonardus Frengky obe[3]
[1]Program Studi Matematika, Universitas Timor
Email Korespondensi: iranaikteas@gmail.com
[2]Program Studi Matematika, Universitas Timor
Email: adrianaleltakaeb97@gmail.com
[3]Program Studi Matematika, Universitas Timor
Email: frengkyobe@gmail.com

ABSTRACT

Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) is one of the major problems public health in Indonesia which still requires treatment until at the moment. One of them is the eradication of dengue mosquito larvae by use of larvicides. This study discusses the distribution model SIR type DHF disease, in which the human population (host) is divided into three classes, namely Susceptible, Infected, and Recovered while the mosquito population (vectors) are also divided into three classes, namely ASI (Aquatic, Susceptible, and Infected). Furthermore, from the model determined the equilibrium point, basic reproduction number, stability analysis of the disease-free equilibrium point and numerical simulation using Wolfram Mathematica 10.0. The results of the analysis show that under conditions $\mathcal{R}_0 < 1$ *the equilibrium point without disease will be asymptotically stable. The simulation results of the effect of using larvicides on the spread of DHF also show that the increasing number of larval deaths due to the effect of using larvicides causes the basic reproduction number to decrease even less so that this can help reduce the rate of spread of DHF in the population.*
Keywords: DHF; Equilibrium Point; Basic Reproduction Numbers; Larvicides.

ABSTRAK

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) menjadi salah satu masalah kesehatan masyarakat di Indonesia yang masih membutuhkan penanganan hingga saat ini. Salah satunya yakni memberantas larva nyamuk DBD memakai larvasida. Penelitian ini membahas mengenai model penyebaran penyakit DBD tipe SIR, kelompok populasi manusia (*host*) dipilah menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered*, sedangkan populasi nyamuk (vektor) juga dalam tiga kelas, yakni *ASI* (*Aquatic*, *Susceptible*, dan *Infected*). Selanjutnya dari model ditentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit dan simulasi. Hasil analisis menunjukkan bahwa pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ titik kesetimbangan tanpa penyakit stabil asimtotik. Hasil simulasi pengaruh penggunaan larvasida terhadap penyebaran penyakit DBD juga menunjukkan bahwa semakin meningkatnya jumlah kematian larva karena pengaruh penggunaan larvasida menyebabkan bilangan reproduksi dasar semakin menurun bahkan sangat kecil sehingga hal ini dapat membantu menekan laju penyebaran penyakit DBD tersebut dalam populasi.
Kata kunci: DBD; Titik Kesetimbangan; Bilangan Reproduksi Dasar; Larvasida

1. PENDAHULUAN

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) menjadi salah satu penyakit menular yang

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

disebabkan oleh infeksi virus *dengue* dan menular ke tubuh manusia melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti*. Penderita yang terinfeksi oleh virus tersebut akan memiliki gejala antara lain demam, pendarahan di kulit atau pada bagian tubuh lainnya serta dapat menimbulkan terjadinya sindrom syok *dengue* (*dengue shock syndrome*) bahkan kematian (Soedarto, 2012).

Hingga saat ini, kasus DBD belum dapat ditanggulangi. Kasus ini acap kali menyebabkan Kejadian Luar Biasa (KLB) di beberapa kabupaten/kota di Indonesia. Menurut data *World Health Organization* (WHO), Asia Pasifik menanggung 75 persen dari beban *dengue* di dunia antara tahun 2004 dan 2010, sementara Indonesia dilaporkan sebagai negara ke-2 dengan kasus DBD terbesar diantara 30 negara wilayah endemis (Infodatin Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI, 2017). Berdasarkan data Kementerian Kesehatan RI (2019) secara nasional jumlah kasus DBD hingga awal Februari 2019 adalah sebanyak 16.692 kasus dengan 169 orang meninggal dunia. Menurut *Cable News Network* (CNN) Indonesia (2019) kasus DBD ini mengalami peningkatan jumlah dari data terakhir Kemenkes tahun 2018 yang menyebutkan bahwa ada 11.293 kasus dengan 112 orang meninggal. Pada tahun 2020, CNN Indonesia juga mengungkapkan bahwa Kementerian Kesehatan (Kemenkes) mencatat sebanyak 71.633 kasus DBD hingga Juli 2020 di Indonesia, dengan angka kematian mencapai 459 kasus.

Jumlah kasus DBD yang semakin meningkat merupakan masalah yang harus diselesaikan. Tindakan penghambatan kasus DBD yakni pengendalian nyamuk yang adalah vektor utama penyakit DBD baik dalam bentuk larva maupun nyamuk dewasa (Bustamam *et al*, 2018). Pemberantasan vektor DBD untuk nyamuk dewasa dapat dilakukan dengan penyemprotan lingkungan rumah dengan insektisida serta penggunaan larvasida memakai aplikasi abatisasi untuk mengendalikan vektor DBD dalam bentuk larva (Windawati *et al*, 2020). Larvasida yaiatu jenis pestisida yang biasanya berbentuk butiran yang dipakai untuk aplikasi pengendalian larva atau jentik nyamuk DBD maupun malaria (Garcia *et al*, 2018).

Pemodelan matematika menjadi alat pendekatan yang menarik untuk menganalisis penyebaran penyakit menular, misalnya DBD. Secara khusus penelitian ini mengkaji penyebaran penyakit DBD dengan penggunaan larvasida terhadap fase akuatik nyamuk DBD, di mana yang merupakan fase akuatik adalah telur, larva dan pupa. Model yang digunakan adalah model SIR di mana populasi manusia (*host*) dipilah menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible, Infected,*dan *Recovered* sedangkan populasi nyamuk (vektor) dipilah juga dalam tiga kelas, yaitu ASI *(Aquatic, Susceptible,* dan *Infected)*. Penelitian sebelumnya tentang model penyebaran penyakit DBD telah dilakukan oleh Binsasi *et al* (2021), yang membahas tentang "Analisis Model Penyebaran Penyakit DBD di Kota Kefamenanu". Model yang digunakan dalam penelitian Binsasi *et al* (2021) adalah model SIR-ASI dengan memperhatikan pemberian pengobatan dan vaksinasi pada populasi manusia rentan serta memperhatikan daya dukung lingkungan nyamuk pada populasi nyamuk akuatik.

Analisis model yang dibentuk dalam penelitian ini merujuk pada model yang diperkenalkan oleh Aini dan Shodiqin (2014) yang mengulas tentang pembentukan model matematika penyebaran penyakit DBD dan selanjutnya dianalisis kestabilan titik kesetimbanganya, kemudian menambahkan salah satu strategi pengendalian vektor DBD yaitu dengan menambahkan penggunaan larvasida pada populasi nyamuk akuatik yang diperkenalkan oleh Ningsih (2017), dalam modelnya Ningsih (2017) tersebut membahas tentang pembentukan model matematika penyebaran penyakit DBD serta pemberian kontrol optimal melalui vaksinasi dan *fogging*. Penambahan fase akuatik sangat berpengaruh terhadap jumlah populasi nyamuk dewasa. Strategi akuatik nyamuk diberikan untuk mengurangi atau membasmi nyamuk DBD sejak dini. Sedangkan pada penelitian ini

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

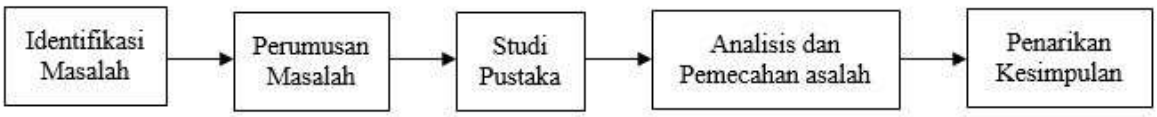
penggunaan larvasida pada populasi nyamuk akuatik adalah untuk melihat seberapa besar pengaruh penggunaan larvasida untuk membunuh jentik atau larva nyamuk, sehingga dapat menekan nyamuk dewasa yang rentan terinfeksi virus *dengue* dan dapat mencegah penyebaran penyakit DBD tersebut. Larvasida yang diperhatikan dalam penelitian ini adalah larvasida alami yaitu ekstrak daun sirsak dan serai wangi.

Penelitian ini bertujuan untuk: memperoleh formulasi model penyebaran penyakit DBD tipe SIR memakai larvasida, memperoleh titik kesetimbangan model penyebaran penyakit DBD tipe SIR memakai larvasida, dan memperoleh kestabilan model penyebaran penyakit DBD tipe SIR memakai larvasida

2. METODOLOGI

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan membangun model penyebaran penyakit DBD tipe SIR memakai Larvasida. Model tersebut kemudian ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, bilangan reproduksi dasar. Kemudian dianalisis kestabilan pada titik kesetimbangan yang diperoleh. Namun dalam penelitian ini analisis kestabilan dibatasi hanya sampai pada analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit saja. Selanjutnyan akan dilakukan simulasi pengaruh penggunaan larvasida menggunakan *software Mathematica 10.0.*

Sumber yang dipakai yaitu: artikel, jurnal, prosiding, dan buku yang berhubungan dengan kasus DBD dan model matematika penyebaran penyakit. Langkah-langkah yang ditempuh dari penelitian ini, yaitu:



Gambar 1. Langkah-langkah penelitian

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model Penyebaran Penyakit DBD memakai Larvasida

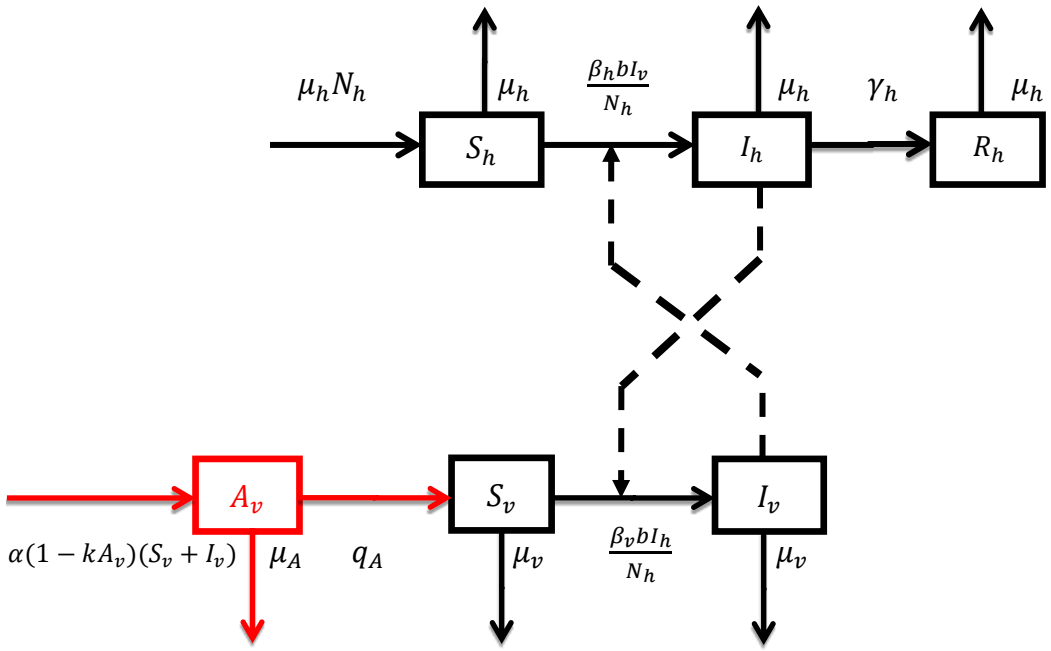
Model matematika yang dipakai dari penelitian ini yakni model SIR-ASI (*host-vektor* atau manusia-nyamuk) dari penyebaran kasus DBD. Populasi manusia (*host*) terbagi menjadi tiga sub populasi, yakni (*Susceptible*) atau sub populasi manusia yang rentan, (*Infected*) atau sub populasi manusia yang terinfeksi virus *dengue*, dan (*Recovered*) atau sub populasi manusia yang sembuh. Sedangkan populasi nyamuk (*vektor*) dipilah juga dalam tiga sub populasi yaitu (*Aquatic*) atau sub populasi nyamuk akuatik, (*Susceptible*) atau sub populasi nyamuk yang rentan, dan (*Infected*) atau sub populasi nyamuk yang terinfeksi. Adapun asumsi-asumsi yang diperhatikan dalam formulasi model yaitu:

1. Hanya ada populasi manusia dan populasi nyamuk dalam suatu kawasan.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

2. Kuantitas populasi manusia konstan, menyebabkan laju kelahiran sama dengan laju kematian.
3. Tidak terdapat migrasi pada populasi manusia.
4. Kelahiran juga kematian alami dari populasi dianggap sama.
5. Individu yang lahir pada populasi manusia akan menjadi rentan.
6. Memiliki satu serotipe virus *dengue* pada suatu kawasan, sehingga individu yang sembuh sudah kebal.
7. Nyamuk yang terinfeksi tidak akan pernah sembuh, ini dikarenakan waktu hidup nyamuk pendek.
8. Kasus DBD dapat berakibat fatal, apabila terinfeksi dan terlambat ditangani maka akan menyebabkan kematian.
9. Jumlah larva nyamuk akan berkurang dengan proporsi sebesar karena adanya pengaruh penggunaan larvasida.
10. Tidak ada efek resisten dari larva nyamuk terhadap pemakaian larvasida.

Bersumber dari asumsi di atas, dan menurut (Aini dan Shodiqin, 2014) serta model (Ningsih, 2017) maka diperoleh model SIR-ASI penyebaran kasus DBD yaitu:



Gambar 2. Model Penyebaran Kasus DBD memakai Larvasida

Dari Gambar 2, didapatkan model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial yakni:

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h \qquad (3.1)$$

$$\frac{dA_v}{dt} = \alpha(1 - kA_v)(S_v + I_v) - (q_A + \mu_A) A_v$$

$$\frac{dS_v}{dt} = q_A A_v - \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v$$

Syarat: $S_\text{h} \geq 0, I_\text{h} \geq 0, R_\text{h} \geq 0, A_v \geq 0, S_v \geq 0$

Nilai variabel dan parameter dalam formulasi model diinformasikan melalui Tabel 1.

Tabel 1. Deskripsi parameter-parameter dalam model

Parameter	Keterangan	Syarat
N_h	Jumlah populasi manusia	$N_h > 0$
μ_h	Menyatakan angka kelahiran dan angka kematian manusia	$\mu_\text{h} > 0$
μ_v	Menyatakan angka kematian alami nyamuk	$\mu_v > 0$
γ_h	Proporsi perpindahan dari manusia terinfeksi menjadi sembuh	$\gamma_h > 0$
b	Tingkat gigitan nyamuk	$b > 0$
q_A	Laju perubahan alami nyamuk akuatik menjadi nyamuk dewasa	$q_A > 0$
μ_A	Laju kematian alami nyamuk akuatik	$\mu_A > 0$
α	Jumlah telur yang dihasilkan nyamuk betina	$\alpha > 0$
k	Jumlah kematian larva karena pengaruh penggunaan larvasida	$k > 0$
β_h	Peluang penyebaran virus dari nyamuk terinfeksi ke individu rentan	$\beta_\text{h} > 0$
β_V	Peluang penyebaran virus dari individu terinfeksi ke nyamuk rentan	$\beta_V > 0$
$\frac{\beta_\text{h} b I_v}{N_\text{h}}$	Laju perubahan S_h menjadi I_h	$\frac{\beta_\text{h} b I_v}{N_\text{h}} > 0$
$\beta_\text{h} b$	Laju kontak I_v dengan S_h	$\beta_\text{h} b > 0$
$\frac{\beta_v b I_\text{h}}{N_\text{h}}$	Laju perubahan S_v menjadi I_v	$\frac{\beta_v b I_\text{h}}{N_\text{h}} > 0$
$\beta_v b$	Laju kontak I_h dengan S_v	$\beta_v b > 0$

3.2 Penentuan Titik Kesetimbangan

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

Titik kesetimbangan menurut sistem (3.1) ditentukan dengan syarat $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0, \frac{dA_v}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0$ dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$, sehingga menghasilkan dua titik kesetimbangan, yaitu: titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

3.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit $T_1 = (S_h, I_h, R_h, A_v, S_v \text{ dan } I_v)$ maka dari sistem (3.1) diperoleh:

$$\mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h = 0 \quad (3.3)$$

$$\gamma_h I_h - \mu_h R_h = 0 \quad (3.4)$$

$$\alpha(1 - kA_v)(S_v + I_v) - (q_A + \mu_A) A_v = 0 \quad (3.5)$$

$$q_A A_v - \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v = 0 \quad (3.7)$$

Dari persamaan (3.7) diperoleh:

$$\frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v = \mu_v I_v$$

$$I_h = \frac{N_h \mu_v I_v}{\beta_v b S_v} \quad (3.8)$$

Subtitusikan persamaan (3.8) pada persamaan (3.3) maka diperoleh:

$$\frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h)\left(\frac{N_h \mu_v I_v}{\beta_v b S_v}\right) = 0$$

$$I_v \left[\frac{\beta_h b}{N_h} S_h - \frac{N_h(\mu_h + \gamma_h)\mu_v}{\beta_v b S_v}\right] = 0$$

diperoleh:

$$I_v = 0 \text{ atau } \frac{\beta_h b}{N_h} S_h - \frac{N_h(\mu_h + \gamma_h)\mu_v}{\beta_v b S_v} = 0$$

$$\frac{\beta_h b}{N_h} S_h = \frac{N_h(\mu_h + \gamma_h)\mu_v}{\beta_v b S_v}$$

$$S_h = \frac{N_h^2(\mu_h + \gamma_h)\mu_v}{\beta_h b \beta_v b S_v} \quad (3.9)$$

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit maka digunakan yang solusinya $I_v = 0$

Kemudian subtitusikan $I_v = 0$ pada persamaan (3.2) diperoleh:

$$\mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h}(0) S_h - \mu_h S_h = 0$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$\mu_h N_h - \mu_h S_h = 0$

$-\mu_h S_h = -\mu_h N_h$

$S_h = \frac{-\mu_h N_h}{-\mu_h}$

$S_h = N_h$

Subtitusikan $I_v = 0$ pada persamaan (3.8) diperoleh:

$I_h = \frac{N_h \mu_v I_v}{\beta_v b S_v}$

$I_h = \frac{N_h \mu_v (0)}{\beta_v b S_v}$

$I_h = 0$

Subtitusikan $I_h = 0$ pada persamaan (3.4) diperoleh:

$\gamma_h(0) - \mu_h R_h = 0$

$-\mu_h R_h = 0$

$R_h = 0$

Subtitusikan $I_h = 0$ pada persamaan (3.6) diperoleh:

$q_A A_v - \frac{\beta_v b}{N_h}(0) S_v - \mu_v S_v = 0$

$q_A A_v - \mu_v S_v = 0$

$-\mu_v S_v = -q_A A_v$

$S_v = \frac{q_A A_v}{\mu_v}$ (3.10)

Subtitusikan $I_v = 0$ pada persamaan (3.10), diperoleh:

$\alpha(1 - kA_v)\left(\frac{q_A A_v}{\mu_v} + 0\right) - (q_A + \mu_A)A_v = 0$

$\alpha(1 - kA_v)\left(\frac{q_A A_v}{\mu_v}\right) - (q_A + \mu_A)A_v = 0$

$\frac{\alpha q_A}{\mu_v} A_v - \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v} A_v - (q_A + \mu_A)A_v = 0$

$A_v\left[\frac{\alpha q_A}{\mu_v} - \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v} - (q_A + \mu_A)\right] = 0$

diperoleh $A_v = 0$ atau $\frac{\alpha q_A}{\mu_v} - \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v} - (q_A + \mu_A) = 0$ sehingga digunakan yang solusinya

$\frac{\alpha q_A}{\mu_v} - \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v} - (q_A + \mu_A) = 0$

$\frac{\alpha q_A}{\mu_v} - (q_A + \mu_A) = \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v}$

$\frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\mu_v} = \frac{\alpha k q_A A_v}{\mu_v}$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$A_v = \frac{(\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v)(\mu_v)}{\mu_v \alpha k q_A}$$

$$A_v = \frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\alpha k q_A}$$

Subtitusikan A_v pada persamaan (3.10) diperoleh:

$$S_v = \frac{q_A\left(\frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\alpha k q_A}\right)}{\mu_v}$$

$$S_v = \frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\alpha k \mu_v}$$

Jadi, didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$T_1 = \left(S_h = N_h,\ I_h = 0,\ R_h = 0,\ A_v = \frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\alpha k q_A},\ S_v = \frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{\alpha k \mu_v} \text{ dan } I_v = 0\right).$$

3.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik diperoleh dengan menggunakan bantuan dari *software Wolfram Mathematica 10.0.* yaitu:

$T_2 = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, A_v^*, S_v^*$ dan $I_v^*)$,

dimana

$$S_h{}^* = \frac{kN_h{}^2 \alpha \mu_v (\beta_v b \mu_h + (\mu_h + \gamma_h)\mu_v)}{\beta_v b (q_A \beta_h b(\alpha - \mu_v) - \beta_h b \mu_A \mu_v + kN_h \alpha \mu_h \mu_v)},$$

$$I_h{}^* = \frac{N_h \mu_h \left(q_A \alpha \beta_h b \beta_v b - \beta_h b \beta_v b \beta_h b \beta_v b (q_A + \mu_A)\mu_v - kN_h \alpha (\mu_h + \gamma_h)\mu_v{}^2\right)}{\beta_v b (\mu_h + \gamma_h)(q_A \beta_h b(\alpha - \mu_v) - \beta_h b \mu_A \mu_v + kN_h \alpha \mu_h \mu_v)},$$

$$R_h{}^* = \frac{N_h \gamma_h \left(q_A \alpha \beta_h b \beta_v b - \beta_h b \beta_v b \beta_h b \beta_v b (q_A + \mu_A)\mu_v - kN_h \alpha (\mu_h + \gamma_h)\mu_v{}^2\right)}{\beta_v b (\mu_h + \gamma_h)\beta_v b (q_A \beta_h b(\alpha - \mu_v) - \beta_h b \mu_A \mu_v + kN_h \alpha \mu_h \mu_v)},$$

$$A_v{}^* = \frac{\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v}{k \alpha \mu_v},$$

$$S_v{}^* = \frac{(\mu_h + \gamma_h)(q_A \beta_h b(\alpha - \mu_v) - \beta_h b \mu_A \mu_v + kN_h \alpha \mu_h \mu_v)}{k \alpha \beta_h b (\beta_v b \mu_h + (\mu_h + \gamma_h)\mu_v)},$$

$$I_v{}^* = \frac{\mu_h \left(q_A \alpha \beta_h b \beta_v b - \beta_h b \beta_v b \beta_h b \beta_v b (q_A + \mu_A)\mu_v - kN_h \alpha (\mu_h + \gamma_h)\mu_v{}^2\right)}{k \alpha \beta_h b \mu_v (\beta_v b \mu_h + (\mu_h + \gamma_h)\mu_v)}.$$

Titik Kesetimbangan bebas penyakit (T_1) ketika $I_h = 0$ dan $I_v = 0$ yaitu tidak terdapat kasus DBD dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik (T_2) ketika $I_h \neq 0$ dan $I_v \neq 0$ yaitu terdapat kasus DBD dalam populasi.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$) didapatkan menggunakan *The Next Generation Matrix* (NGM) pada titik kesetimbangan bebas penyakit T_1. $\mathcal{R}_0$ diturunkan dengan memperhatikan persamaan kompartemen terinfeksi virus *dengue* saja, dalam hal ini I_h dan I_v di mana:

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v$$

Misalkan $x = (I_h, I_v)^T$ dan dituliskan sistem terinfeksi di atas dalam bentuk $\dot{x} = (F - V)x$

Untuk F yaitu matriks laju infeksi baru, sementara V yaitu matriks laju perpindahan sub populasi.

Misalkan φ adalah vektor untuk infeksi baru dan ψ adalah vektor untuk perpindahan sub populasi

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h \\ \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v \end{bmatrix} \text{ dan } \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu_h + \gamma_h) I_h \\ -\mu_v I_v \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_1 I_h & \varphi_1 I_v \\ \varphi_2 I_h & \varphi_2 I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_h b}{N_h} S_h \\ \frac{\beta_v b}{N_h} S_v & 0 \end{bmatrix} \text{ matriks laju infeksi baru}$$

$$V = \begin{bmatrix} \psi_1 I_h & \psi_1 I_v \\ \psi_2 I_h & \psi_2 I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu_h + \gamma_h) & 0 \\ 0 & -\mu_v \end{bmatrix} \text{ matriks laju perpindahan sub populasi}$$

Subtitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit pada F dan V diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_h b}{N_h}(N_h) \\ \frac{\beta_v b}{N_h}\left(\frac{(\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v)}{k\alpha\mu_v}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_h b \\ \frac{\beta_v b(\alpha q_A - (q_A + \mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$V = \begin{bmatrix} -(\mu_h + \gamma_h) & 0 \\ 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

Mencari nilai V^{-1}, sehingga diperoleh:

$$V^{-1} = \frac{1}{|V|} \text{adj } (V)$$

$$= \frac{1}{[-(\mu_h+\gamma_h)][-\mu_v]} \begin{bmatrix} -\mu_v & 0 \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\mu_h+\gamma_h)(\mu_v)} \begin{bmatrix} -\mu_v & 0 \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) \end{bmatrix}$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu_h+\gamma_h} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_v} \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan:

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_h b \\ \frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu_h+\gamma_h} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu_v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta_h b}{\mu_v} \\ -\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha(\mu_h+\gamma_h)\mu_v} & 0 \end{bmatrix}$$

Ambang Batas Epidemik ($\mathcal{R}_0$)

$\mathcal{R}_0$ diperoleh dengan menggunakan rumus $\det|K-\lambda I|=0$ dengan $K=FV^{-1}$ $\det|K-\lambda I|=0$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta_h b}{\mu_v} \\ -\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha(\mu_h+\gamma_h)\mu_v} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0-\lambda & -\frac{\beta_h b}{\mu_v}-0 \\ -\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha(\mu_h+\gamma_h)\mu_v}-0 & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$((-\lambda)(-\lambda)) - \left(\left(-\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha(\mu_h+\gamma_h)\mu_v} \right) \left(-\frac{\beta_h b}{\mu_v} \right) \right) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha(\mu_h+\gamma_h)\mu_v^2} = 0$$

maka diperoleh nilai eigen yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\beta_h b}\sqrt{\beta_v b}\sqrt{\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v}}{\sqrt{N_h}\sqrt{k}\sqrt{\alpha}\sqrt{\mu_h+\gamma_h}\mu_v}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\beta_h b}\sqrt{\beta_v b}\sqrt{\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v}}{\sqrt{N_h}\sqrt{k}\sqrt{\alpha}\sqrt{\mu_h+\gamma_h}\mu_v}$$

Diekmann dan Heesterbeek (2000), menyimpulkan $\mathcal{R}_0$ sebagai nilai eigen dominan dari *The Next Generation Matrix*. Akibatnya definisi dari nilai eigen yang dihasilkan dari persamaan ini jika dihargamutlakkan tidak memperoleh hasil yang dominan yaitu nilai $|\lambda_1|=|\lambda_2|$, sehigga dilakukan perkalian antara $|\lambda_1|$ dan $|\lambda_2|$, maka diperoleh:

$$\mathcal{R}_0 = |\lambda_1|\,|\lambda_2|$$

$$\mathcal{R}_0 = \left| \frac{\sqrt{\beta_h b}\sqrt{\beta_v b}\sqrt{\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v}}{\sqrt{N_h}\sqrt{k}\sqrt{\alpha}\sqrt{\mu_h+\gamma_h}\mu_v} \right| \left| \frac{\sqrt{\beta_h b}\sqrt{\beta_v b}\sqrt{\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v}}{\sqrt{N_h}\sqrt{k}\sqrt{\alpha}\sqrt{\mu_h+\gamma_h}\mu_v} \right|$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

Berdasarkan perhitungan tersebut maka diperoleh:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_h b \beta_v b(\alpha q_A - (q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k \alpha (\mu_h+\gamma_h)\mu_v^2}. \tag{3.11}$$

3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (T_1)

Misalkan ruas kanan persamaan (3.1) ditulis dalam bentuk

$$f_1(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h$$

$$f_2(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$f_3(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = \gamma_h I_h - \mu_h R_h$$

$$f_4(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = \alpha(1 - kA_v)(S_v + I_v) - (q_A + \mu_A)A_v$$

$$f_5(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = q_A A_v - \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v$$

$$f_6(S_h, I_h, R_h, A_v, S_v, I_v) = \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v$$

Penentuan kestabilan di area titik kesetimbangan bebas penyakit (T_1), sebelumnya dilakukan pelinearan terhadap persamaan (3.1), kemudian diperoleh matriks

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_h} & \frac{\partial f_1}{\partial I_h} & \frac{\partial f_1}{\partial R_h} & \frac{\partial f_1}{\partial A_v} & \frac{\partial f_1}{\partial S_v} & \frac{\partial f_1}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_h} & \frac{\partial f_2}{\partial I_h} & \frac{\partial f_2}{\partial R_h} & \frac{\partial f_2}{\partial A_v} & \frac{\partial f_2}{\partial S_v} & \frac{\partial f_2}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_h} & \frac{\partial f_3}{\partial I_h} & \frac{\partial f_3}{\partial R_h} & \frac{\partial f_3}{\partial A_v} & \frac{\partial f_3}{\partial S_v} & \frac{\partial f_3}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_h} & \frac{\partial f_4}{\partial I_h} & \frac{\partial f_4}{\partial R_h} & \frac{\partial f_4}{\partial A_v} & \frac{\partial f_4}{\partial S_v} & \frac{\partial f_4}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_h} & \frac{\partial f_5}{\partial I_h} & \frac{\partial f_5}{\partial R_h} & \frac{\partial f_5}{\partial A_v} & \frac{\partial f_5}{\partial S_v} & \frac{\partial f_5}{\partial I_v} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_h} & \frac{\partial f_6}{\partial I_h} & \frac{\partial f_6}{\partial R_h} & \frac{\partial f_6}{\partial A_v} & \frac{\partial f_6}{\partial S_v} & \frac{\partial f_6}{\partial I_v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\beta_h b}{N_h} I_v - \mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_h b}{N_h} S_h \\ \frac{\beta_h b}{N_h} I_v & -(\mu_h + \gamma_h) & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_h b}{N_h} S_h \\ 0 & \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & -\frac{\beta_v b}{N_h} S_v & 0 & q_A & -\frac{\beta_v b}{N_h} I_h - \mu_v & 0 \\ 0 & \frac{\beta_v b}{N_h} S_v & 0 & 0 & \frac{\beta_v b}{N_h} I_h & -\mu_v \end{bmatrix}$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

dengan $A = -\alpha k(S_v + I_v) - (q_A + \mu_A)$, $B = \alpha(1 - kA_v)$, $C = \alpha(1 - kA_v)$

Subtitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit (T_1) ke matriks Jacobi menghasilkan

$$J(T_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & a_{12} \end{bmatrix}$$

dengan $a_1 = -\mu_h$, $a_2 = -\beta_h b$, $a_3 = -(\mu_h + \gamma_h)$, $a_4 = \beta_h b$, $a_5 = \gamma_h$, $a_6 = -\mu_h$

$a_7 = -\frac{\alpha q_A}{\mu_v}$, $a_8 = -\frac{(q_A+\mu_A)\mu_v}{q_A}$, $a_9 = -\frac{(q_A+\mu_A)\mu_v}{q_A}$, $a_{10} = -\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}$, $a_{11} = q_A$,

$a_{12} = -\mu_v$, $a_{13} = \frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}$, $a_{14} = -\mu_v$,

Selanjutnya nilai eigen diperoleh dengan menentukan $\det|JT_1 - \lambda I| = 0$ untuk mendapatkan persamaan karakteristik.

$\det|JT_1 - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & a_{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 - \lambda & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_5 & a_6 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 - \lambda & a_8 & a_9 \\ 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & a_{12} - \lambda & 0 \\ 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & a_{14} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

dengan memakai aturan kofaktor didapatkan determinan matriks:

$$(a_1 - \lambda) \begin{bmatrix} a_3 - \lambda & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & a_6 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 - \lambda & a_8 & a_9 \\ a_{10} & 0 & a_{11} & a_{12} - \lambda & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & 0 & a_{14} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(a_1 - \lambda)(a_6 - \lambda) \begin{bmatrix} a_3 - \lambda & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_7 - \lambda & a_8 & a_9 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} - \lambda & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & a_{14} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$(a_1-\lambda)(a_6-\lambda)\left((a_7-\lambda)\begin{bmatrix} a_3-\lambda & 0 & a_4 \\ a_{10} & a_{12}-\lambda & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{14}-\lambda \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.(-a_{11})\begin{bmatrix} a_3-\lambda & 0 & a_4 \\ 0 & a_8 & a_9 \\ a_{13} & 0 & a_{14}-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$(a_1-\lambda)(a_6-\lambda)\left((a_7-\lambda)(a_{12}-\lambda)\begin{bmatrix} a_3-\lambda & a_4 \\ a_{13} & a_{14}-\lambda \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.(-a_{11})(a_8)\begin{bmatrix} a_3-\lambda & a_4 \\ a_{13} & a_{14}-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$(a_1-\lambda)(a_6-\lambda)\left(\left((a_7-\lambda)(a_{12}-\lambda)+(-a_{11})(a_8)\right)\begin{bmatrix} a_3-\lambda & a_4 \\ a_{13} & a_{14}-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

maka diperoleh persamaan karakteristik yaitu:

$$\Leftrightarrow (a_1-\lambda)(a_6-\lambda)\big((a_7-\lambda)(a_{12}-\lambda)+(-a_{11})(a_8)\big)\big((a_3-\lambda)(a_{14}-\lambda)-a_4a_{13}\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a_1-\lambda)(a_6-\lambda)\big(\lambda^2-\lambda(a_7+a_{12})+(a_7a_{12}-a_8a_{11})\big)\big(\lambda^2-\lambda(a_3+a_{14})+(a_3a_{14}-a_4a_{13})\big)=0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen

- $a_1-\lambda=0$
  $-\lambda=-a_1$
  $\lambda=a_1$
  $\lambda_1=-\mu_h$

- $a_6-\lambda=0$
  $-\lambda=-a_6$
  $\lambda=a_6$
  $\lambda_2=-\mu_h$

- $\lambda^2-\lambda(a_7+a_{12})+(a_7a_{12}-a_8a_{11})=0$

$$\lambda^2-\lambda\left(\left(-\frac{\alpha q_A}{\mu_v}\right)+(-\mu_v)\right)+\left(\left(-\frac{\alpha q_A}{\mu_v}\right)(-\mu_v)-\left(\left(-\frac{(q_A+\mu_A)\mu_v}{q_A}\right)(q_A)\right)\right)=0$$

$$\lambda^2-\lambda\left(-\left(\frac{\alpha q_A}{\mu_v}+\mu_v\right)\right)+(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)=0$$

$$\lambda^2+\lambda\left(\frac{\alpha q_A+{\mu_v}^2}{\mu_v}\right)+(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)=0$$

dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat diperoleh:

$$\lambda_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$= \frac{-\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(1)(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}}{2}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}$$

$$\lambda_4 = \frac{-\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}}{2}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha q_A+\mu_v}{\mu_v}\right)^2 - 4(\alpha q_A+(q_A+\mu_A)\mu_v)}$$

- $\lambda^2 - \lambda(a_3 + a_{14}) + (a_3 a_{14} - a_4 a_{13}) = 0$

$$\lambda^2 - \lambda\big(-(\mu_h+\gamma_h)+(-\mu_v)\big) + \left(-(\mu_h+\gamma_h)(-\mu_v) - \beta_h b\left(\frac{\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)\right) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda\big((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v\big) + \left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right) = 0$$

dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat diperoleh:

$$\lambda_{5,6} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v) \pm \sqrt{((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)^2 - 4(1)\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v) \pm \sqrt{((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)^2 - 4\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}}{2}$$

$$\lambda_5 = \frac{-((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v) + \sqrt{((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)^2 - 4\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}}{2}$$

$$= -\frac{\big((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v\big)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\big((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v\big)^2 - 4\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v - \frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}$$

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

$$\lambda_6 = \frac{-((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)-\sqrt{((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)^2-4\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v-\frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}}{2}$$

$$= -\frac{((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v)}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left((\mu_h+\gamma_h)+\mu_v\right)^2-4\left((\mu_h+\gamma_h)\mu_v-\frac{\beta_h b\beta_v b(\alpha q_A-(q_A+\mu_A)\mu_v)}{N_h k\alpha\mu_v}\right)}$$

Berdasarkan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dan λ_6 yang diperoleh, diketahui bahwa bagian real dari nilai-nilai eigen tersebut bertanda negatif dan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dan $\lambda_6 < 0$, kemudian disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (T_1) dari model penyebaran penyakit DBD tipe SIR dengan larvasida adalah stabil asimtotik.

3.5 Simulasi Numerik

Pada pembahasan selanjutnya dilakukan simulasi numerik. Simulasi ini diselesaikan agar dapat mengetahui pengaruh penggunaan larvasida pada kasus DBD dalam populasi. Beberapa nilai parameter dan variabel yang dibutuhkan pada simulasi tertuang dalam Tabel 2 dan Tabel 3.

Tabel 2. Nilai awal parameter

Simbol	Nilai	Sumber
N_h	47802	Ningsih (2017)
β_h	0. 75	Aini dan Shodiqin (2014)
β_v	1	Aini dan Shodiqin (2014)
γ_h	0.1428	Aini dan Shodiqin (2014)
μ_h	0.0000475	Aini dan Shodiqin (2014)
μ_v	0.25	Aini dan Shodiqin (2014)
q_A	0.1	Ningsih (2017)
μ_A	0.1	Binsasi *et al* (2021)
α	10	Ningsih (2017)
b	0.5	Aini dan Shodiqin (2014)
k	0.02	Asumsi

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

Tabel 3. Nilai awal setiap variabel

Variabel	Nilai	Sumber
$S_h(0)$	47800	Asumsi
$I_h(0)$	2	Asumsi
$R_h(0)$	0	Asumsi
$A_v(0)$	100	Asumsi
$S_v(0)$	50	Asumsi
$I_v(0)$	5	Asumsi

Simulasi Pengaruh Penggunaan Larvasida

Simulasi ini diperlukan untuk melihat pengaruh penggunaan larvasida pada kasus DBD dalam populasi. Selain itu, akan ditunjukkan bahwa ketika k ditingkatkan menyebabkan $\mathcal{R}_0$ akan melandai. 4 nilai parameter k yang dipakai terletak pada interval [0.02, 0.05] dengan jarak 0.01. Nilai parameter dapat dilihat pada Tabel 2, sedangkan nilai $\mathcal{R}_0$ dari parameter k ditingkatkan dapat dilihat pada Tabel 4.

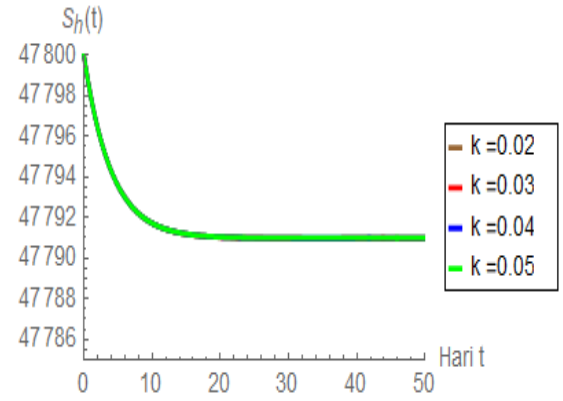
Tabel 4. Nilai $\mathcal{R}_0$ dengan parameter k ditingkatkan

(k)	$\mathcal{R}_0$
0.02	0.00208689
0.03	0.00139126
0.04	0.00104344
0.05	0.00083475

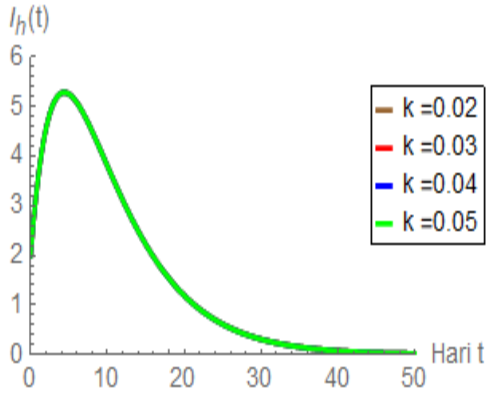
Menurut Tabel 4 dapat diketahui bahwa nilai $\mathcal{R}_0$ masih kurang dari 1 bahkan sangat kecil. Meningkatnya jumlah kematian larva karena pengaruh penggunaan larvasida (k) menyebabkan nilai $\mathcal{R}_0$ semakin menurun, akibatnya dapat menekan laju penyebaran kasus DBD dalam populasi.

Kemudian simulasi dilakukan untuk mengetahui pengaruh peningkatan jumlah kematian larva karena penggunaan larvasida terhadap populasi, baik populasi manusia, nyamuk maupun populasi nyamuk akuatik. Lihat Gambar 3.

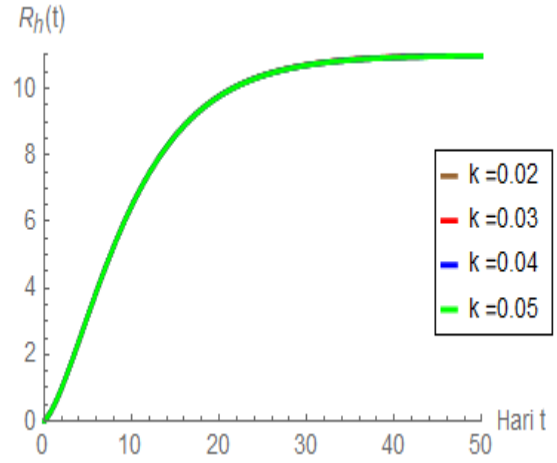
P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27



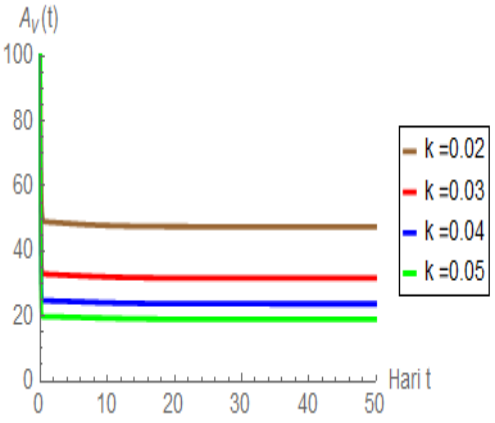
(a)



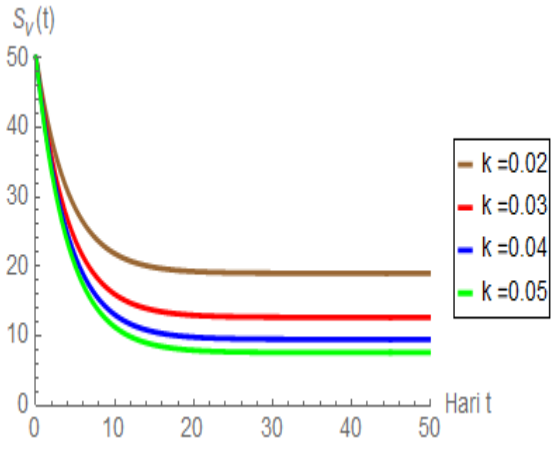
(b)



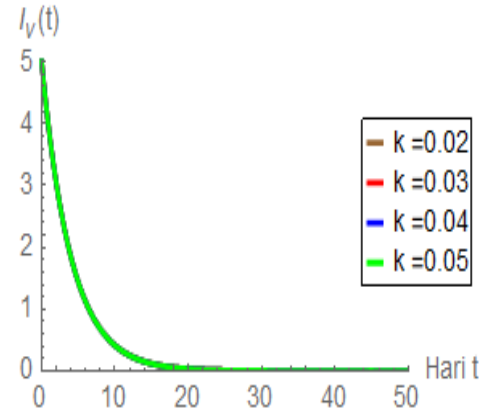
(c)



(d)



(e)



(f)

Gambar 3. Populasi Manusia dan Nyamuk dengan Parameter *k* ditingkatkan

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

Gambar 3(a)-(c) menjelaskan bahwa berapapun nilai parameter k, jumlah populasi manusia pada kelas rentan sedikit menurun dari nilai awal dan stabil, untuk jumlah populasi manusia terinfeksi meningkat dari nilai awal kemudian kembali menurun dan stabil pada titik kesetimbangan 0, sedangkan jumlah populasi manusia sembuh bertambah dan stabil. Hal ini dikarenakan meningkatnya nilai parameter k menyebabkan penurunan pada jumlah populasi nyamuk akuatik, nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi. Akibatnya ada penurunan pada jumlah populasi manusia rentan dan populasi manusia terinfeksi, sehingga jumlah populasi manusia pada kelas sembuh bertambah.

Jumlah populasi nyamuk sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 3(d)-(f), jika nilai parameter k ditingkatkan dan nilai parameter lain tetap maka, jumlah populasi nyamuk akuatik, nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi semakin berkurang. Hal ini dikarenakan dengan adanya penggunaan larvasida menyebabkan penurunan pada jumlah populasi nyamuk akuatik sehingga mengakibatkan jumlah pada populasi nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi juga berkurang.

4. SIMPULAN

Sesuai hasil analisis dan pembahasan yang dilakukan terhadap model penyebaran penyakit DBD tipe *SIR* dengan larvasida diperoleh kesimpulan:

1. Model yang dihasilkan mampu menggambarkan penyebaran penyakit BDB Tipe SIR dengan larvasida.
2. Terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.
3. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil ketika $\mathcal{R}_0 < 1$.
4. Hasil simulasi menunjukkan bahwa meningkatnya jumlah kematian larva karena pengaruh penggunaan larvasida (k) menyebabkan nilai $\mathcal{R}_0$ menurun, sehingga membantu menekan laju penyebaran penyakit dalam populasi.
5. Hasil simulasi juga menerangkan bahwa meningkatnya jumlah kematian larva karena pengaruh penggunaan larvasida (k) memberi pengaruh terhadap masing-masing populasi. Dimana jumlah populasi manusia kelas rentan dan kelas terinfeksi mengalami penurunan, sementara jumlah populasi manusia kelas sembuh meningkat. Pengaruh yang terjadi pada jumlah populasi nyamuk yaitu, jumlah populasi nyamuk akuatik berkurang sehingga populasi nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi juga berkurang.

P-ISSN: 2655-3724 E-ISSN: 2720-9881
STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)
Vol. 4, No. 1, Januari 2022
Artikel ke-2, Halaman: 9-27

5. DAFTAR PUSTAKA

Aini, A. N., & Shodiqin, A. (2014). Analisis Kestabilan dan Simulasi Model Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD). *AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 5(2): 48-66.

Binsasi, E., Elinora, N. B., Salsinha, C. N. (2021). Analisis model penyebaran penyakit demam berdarah dengue di kota kefamenanu. *STATMAT (Jurnal Statistika dan Matematika)*, 3(1): 1-11.

Bustamam, A., Aldila, D., & Yuwanda, A. (2018). Understanding dengue control for short- and long-term intervention with a mathematical model approach. *Journal of Applied Mathematics*.

CNN Indonesia. (2019). "Kasus Meningkat Indonesia Waspada DBD". https://www.cnnindonesia.com/gaya-hidup/20190131142925-255-365417/kasus-meningkat-indonesia-waspada-dbd/. Diakses 30 April 2021 14:40.

CNN Indonesia. (2020). "Hingga Juli, Kemenkes Catat 71 Ribu Kasus DBD". https://www.cnnindonesia.com/nasional/20200712091335-20-523662/hingga-juli-kemenkes-catat-71-ribu-kasus-dbd/. Diakses 30 April 2021 14:45.

Diekmann, O. dan Heesterbeek, J.A.P. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease: Model Building, Analysis and Interpretation.* New York: Wiley.

Garcia, G. A., David, M. R., *et al*. (2018). The impact of insecticide applications on the dynamics of resistance: The case of four Aedes sp. populations from different Brazilian regions. PLoS Negl Trop Dis, 12(2), e0006227. doi:10.1371/journal.pntd.0006227.

Infodatin Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI. (2017). "Situasi Penyakit Demam Berdarah di Indonesia Tahun 2017". http://www.depkes.go.id/download.php?file=download/pusdatin/infodatin/Info/ Datin Situasi-Demam-Berdarah-Dengue.pdf. Diakses pada 30 April 2021 15:07.

Kementerian Kesehatan RI. (2019). Buletin Jendela Epidemilogi: Demam Berdarah Dengue, Volume 2. Jakarta: Pusat Data dan Surveilans Epidemiologi.

Ningsih, S. (2017). Kontrol optimal penyebaran penyakit demam berdarah dengue melalui vaksinasi dan fogging. Skripsi. Universitas Hasanuddin Makassar.

Soedarto. (2012). *Demam Berdarah Dengue*. Sagung Seto, Jakarta.

Windawati, S., Shodiqin, A., Aini, A. N. (2020). Analisis model matematika penyebaran penyakit demam berdarah dengan pengaruh fogging. *AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 2(1): 1-16.